รายงานวิจัย

ไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

Prime ideals in n-ary semigroups

ณัฏฐา สอดส่อง

อัจฉราวดี สุขทอง

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

2561

ใบรับรองงานวิจัย

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ชื่อเรื่องงานวิจัย ไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

Prime ideals in n-ary semigroups

ชื่อผู้ทำงานวิจัย ณัฏฐา สอดส่อง และ อัจฉราวดี สุขทอง

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัย

....อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.ภัทราวรรณ เพชรแก้ว)

....ประธานกรรมการสอบ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชิงชัย วัฒนธรรมเมธี)

....กรรมการสอบ
(อาจารย์ธีรพล บัวทอง)

....กรรมการสอบ
(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

....ประธานหลักสูตร
(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุมัติ เดชนะ)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เมื่อวันที่...

ชื่อเรื่อง	ไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค
ชื่อผู้ทำงานวิจัย	ณัฏฐา สอดส่อง รหัสนักศึกษา 584254004
	อัจฉราวดี สุขทอง รหัสนักศึกษา 584254036
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.ภัทราวรรณ เพชรแก้ว
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สถาบัน	มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
ปีการศึกษา	2561

บทคัดย่อ

เป็นที่ทราบกันดีว่าแนวคิดเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะมีบทบาทสำคัญในโครงสร้างเกี่ยวกับพีชคณิต เช่น ริง กึ่งริง กึ่งกรุป และกึ่งกรุปไตรภาค จุดประสงค์ในการวิจัยครั้งนี้คือการขยายแนวคิดเรื่องไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค ในบทความนี้ เราศึกษาเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาคและศึกษาสมบัติบางประการของไอดีลเหล่านี้ในกึ่งกรุป n-วิภาค

คำสำคัญ: ไอดีล ไอดีลเฉพาะ กึ่งกรุป n-วิภาค

Project Title	Prime ideals in n-ary semigroups
Authors	Nattha Sodsong Student ID 584254004
	Atcharawadee Sukthong Student ID 584254036
Advisor	Lect. Dr.Pattarawan Petchkaew
Bachelor of Science	Program in Mathematics
Institute	Songkhla Rajabhat University
Academic Year	2561

ABSTRACT

One knows that the concept of prime ideals play an important role in algebraic structures, for instance, in rings, in semirings, in semigroups, in ternary semigroups. Our aim in this research is to extend prime ideals in ternary semigroups to prime ideals in n-ary semigroups. In this paper, we investigate about prime ideals in n-ary semigroups and we give some properties of those ideals in n-ary semigroups.

Keyword: ideal, prime ideal, n-ary semigroup.

คำนำ

รายงานการศึกษาโครงงานทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาวิชา 4574902 โครงงานทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา จัดทำขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อขยายไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาค ไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค และศึกษาสมบัติบางประการของไอดีลเหล่านี้ในกึ่งกรุป n-วิภาค

ผู้จัดทำ ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.ภัทราวรรณ เพชรแก้ว (อาจารย์ที่ปรึกษา) ผู้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และช่วยเหลือในการทำโครงงานครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

ณัฏฐา สอดส่อง และ อัจฉราวดี สุขทอง

กุมภาพันธ์ 2562

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง ไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค ในครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทั้งนี้เพราะได้รับความอนุเคราะห์และคำแนะนำจากผู้ทรงความรู้หลาย ๆ ท่าน โดยเฉพาะ อาจารย์ ดร.ภัทราวรรณ เพชรแก้ว อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ที่ได้เสียสละเวลาเพื่อให้คำปรึกษาแนะนำ และให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ

ขอขอบคุณอาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ให้ความรู้ คำปรึกษาจนกระทั่งโครงงานนี้เสร็จสมบูรณ์ ขอบคุณพี่ ๆ และเพื่อน ๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกคน ที่คอยให้คำแนะนำและคอยให้กำลังใจกันมาตลอด

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณคุณพ่อ คุณแม่ ที่คอยสนับสนุนและเป็นกำลังที่สำคัญที่ทำให้โครงงานนี้เสร็จสมบูรณ์

ณัฏฐา สอดส่อง และ อัจฉราวดี สุขทอง

กุมภาพันธ์ 2562

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบันมีการศึกษาเกี่ยวกับไอดีลในริง ไอดีลในกึ่งริง ไอดีลในกรุป ไอดีลในกึ่งกรุป ไอดีลในกรุปไตรภาคและไอดีลในกึ่งกรุปไตรภาคอย่างหลากหลาย ซึ่งไอดีลที่เป็นที่รู้จักกันดีที่สุด ไอดีลหนึ่งคือไอดีลเฉพาะ ซึ่งมีการศึกษาทั้ง ไอดีลเฉพาะของริง ไอดีลเฉพาะของกึ่งริง ไอดีลเฉพาะของกึ่งกรุป ไอดีลเฉพาะของกรุปไตรภาค ไอดีลเฉพาะของกึ่งกรุปไตรภาค และเมื่อไม่นานมานี้ ได้มีนักวิจัยหลายท่านได้ขยายงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปและกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นงานวิจัยในกึ่งกรุป n-วิภาค ทำนองเดียวกันในงานวิจัยนี้เราได้ขยายงานวิจัยที่เกี่ยวกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นงานวิจัยที่เกี่ยว กับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

1.2 จุดประสงค์

1) เพื่อศึกษากึ่งกรุป n-วิภาค ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุปและกึ่งกรุปไตรภาค

2) เพื่อขยายแนวคิดเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

3) ศึกษาสมบัติบางประการของไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

1.3 ขอบเขตการศึกษา

ศึกษาไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

1.4 วิธีดำเนินการศึกษา

1) ศึกษากึ่งกรุป n-วิภาค ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุปและกึ่งกรุปไตรภาค

2) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาค

3) ขยายงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

4) เขียนรายงานและส่งเล่มรายงาน

5) สอบโครงงานวิจัยทางคณิตศาสตร์

1.5 แผนดำเนินการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ.2561							
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1. ศึกษากึ่งกรุป n-วิภาค ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุปและกึ่งกรุปไตรภาค								
2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาค								
3. ขยายงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค								
4. เขียนรายงานและส่งเล่มรายงาน								
5. สอบโครงงานวิจัยทางคณิตศาสตร์								

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้ความรู้ ความสัมพันธ์เกี่ยวกับกึ่งกรุป n-วิภาค ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุปและกึ่งกรุปไตรภาค

2) ได้ขยายแนวคิดเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

3) ได้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติบางประการของไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้พื้นฐาน

สำหรับในงานวิจัยฉบับนี้ ผู้เขียนจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$\mathbb{R}$ แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$\mathbb{Q}$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด

$\mathbb{N}$ แทน เซตของจำนวนนับทั้งหมด

$\mathbb{Z}$ แทน เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

$\mathbb{Z}^+$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

$\mathbb{Z}^-$ แทน เซตของจำนวนเต็มลบทั้งหมด

$\mathbb{Z}_0^+$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดรวมศูนย์

$\mathbb{Z}_0^-$ แทน เซตของจำนวนเต็มลบทั้งหมดรวมศูนย์

$\mathbb{Z}_n$ แทน เซตของชั้นส่วนตกค้างมอดุโล n ทั้งหมด

$\mathbb{O}$ แทน เซตของจำนวนคี่ทั้งหมด

E แทน เซตของจำนวนคู่ทั้งหมด

บทนิยามของการดำเนินการทวิภาค (binary operation) และตัวอย่าง 1 ของการดำเนินการทวิภาค ต่อไปนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรมของ รณสรรพ์ ชินรัมย์ (2007)

บทนิยาม 2.1 ให้ A เป็นเซตไม่ว่าง ถ้า $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไป A จะเรียก $*$ ว่า **การดำเนินการทวิภาค** บน A ถ้า $*$ ส่ง (a, b) ไปยังสมาชิกตัวใดใน A และจะเขียนแทนสมาชิกตัวนั้นด้วย $a * b$

ข้อควรระมัดระวัง

1) $*$ ต้องถูกนิยามจาก $(a, b) \in A \times A$

2) $*$ ต้องนิยามแจ่มชัด (well defined) นั่นคือ ถ้า $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$ แล้ว $x_1 * y_1 = x_2 * y_2$

3) สำหรับ $a, b \in A$ เราต้องได้ว่า $a * b$ ต้องอยู่ใน A

4) สำหรับเงื่อนไขในข้อ 3 จะกล่าวว่า A มีสมบัติปิด (closed property) ภายใต้ $*$

ตัวอย่าง 1

1) การดำเนินการ บวก ลบ และ $\cdot$ บน $\mathbb{Z}$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$

2) นิยามการดำเนินการ $*$ บน $\mathbb{N}$ โดย

$a * b = max\{a, b\}$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{N}$

จะได้ว่า $*$ ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{N}$

3) นิยามการดำเนินการ $*$ บน $\mathbb{Q}$ โดย

$a * b = \frac{a}{b}$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Q}$

จะได้ว่า $*$ ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Q}$ เพราะว่า $3 * 0 = \frac{3}{0}$ ซึ่งไม่ได้ถูกนิยามใน $\mathbb{Q}$

4) นิยามการดำเนินการ บวก บน $\mathbb{Z}_n$ โดย

$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$

จะได้ว่า บวก ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}_n$

ในบทนิยามและตัวอย่าง 2 ถึง ตัวอย่าง 5 ของสมบัติปิดภายใต้การ $*$ ต่อไปนี้ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ วัฒพงษ์ พันอินากูล (2012) ส่วนตัวอย่างที่ 6 ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ ประสิทธิ์ กิจจนศิริ (2003)

บทนิยาม 2.2 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A และ $B \subseteq A$ จะเรียก B ว่ามี **สมบัติปิด** ภายใต้การดำเนินการ $*$ ถ้า $a * b \in B$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in B$

ข้อสังเกต การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A จะต้องมีสมบัติต่อไปนี้

1) $a * b$ มีผลลัพธ์ค่าเดียว สำหรับทุก ๆ $a, b \in A$ นั่นคือ ถ้า $a * b = c$ และ $a * b = d$ แล้ว $c = d$ เนื่องจาก $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไปยัง A

2) A จะมีสมบัติปิดภายใต้ $*$

ตัวอย่าง 2 การดำเนินการ บวก ลบ และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ จะได้ $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ บวก , $\cdot$ แต่ $\mathbb{Z}^+$ ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ ลบ เช่น $3 - 5 \notin \mathbb{Z}^+$

ตัวอย่าง 3 การดำเนินการ บวก ลบ และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน E โดยที่ E เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่

ตัวอย่าง 4 การดำเนินการ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{O}$ โดยที่ $\mathbb{O}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่แต่ บวก และ ลบ ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{O}$ เนื่องจาก $3, 5 \in \mathbb{O}$ แต่ $3 + 5, 3 - 5 \notin \mathbb{O}$

ตัวอย่าง 5 ให้ $\cdot$ เป็นการดำเนินการบน $\mathbb{Z}$ กำหนดโดย $a \cdot b = c$ โดยที่ c เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า $a + b$ จะได้ว่า $\cdot$ ไม่เป็นการดำเนินการบน $\mathbb{Z}$ เนื่องจาก $a \cdot b$ มีผลลัพธ์หลายค่า

ตัวอย่าง 6 ให้ $S = \{(a, b) | a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0\}$ และการดำเนินการ * กำหนดโดย $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$ เป็นการดำเนินการทวิภาค เนื่องจาก $ac, bd \in R$ และ $ac \neq 0$ ดังนั้น $(ac, bd) \in S$

บทนิยามของกรุป (group) กรุปพอยด์ (groupoid) และ โมนอยด์ (monoid) ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรมของ รณสรรพ์ ชินรัมย์ (2007) ส่วนตัวอย่าง 7 ถึง 8 ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรมของ วัชรี กาญจน์กีรติ (2008)

บทนิยาม 2.3 จะเรียก $(G, *)$ ว่า **กรุป** ถ้า G เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

i) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ นั่นคือ $a * (a * c) = (a * b) * c$ สำหรับทุก $a, b, c \in G$

ii) มีสมาชิก e ซึ่ง $a * e = e * a = a$ สำหรับทุก $a \in G$ และจะเรียก e ว่า **เอกลักษณ์** (identity) ของ G ภายใต้การดำเนินการ $*$

iii) สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน G จะหาสมาชิก b ใน G ได้ซึ่ง $a * b = b * a = e$ จะเรียก b ว่า **ตัวผกผัน** (inverse) ของ a

ตัวอย่าง 7 ให้ $G = \{1, -1, i - i\}$ และ $\cdot$ เป็นการคูณปกติ ดังนั้น $(G, *)$ เป็นกรุปภายใต้การคูณ เนื่องจากการคูณมีสมบัติปิดกับมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ มี 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ $-1, 1$ เป็นตัวผกผันของตัวเอง i เป็นตัวผกผันของ $-i$ และ $-i$ เป็นตัวผกผันของ i

ตัวอย่าง 8

1) $(\mathbb{Z}^+, +)$ ไม่เป็นกรุป เนื่องจาก ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์ในเซต $\mathbb{Z}^+$

2) $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$ ไม่เป็นกรุป เนื่องจาก 0 เป็นสมาชิกทุกตัวยกเว้น 0 ไม่มีตัวผกผัน

3) $(\mathbb{Z}^+, *)$ ไม่เป็นกรุป เนื่องจาก 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ แต่สมาชิกทุกตัวยกเว้น 1 ไม่มีตัวผกผัน

4) $(\mathbb{Z}, -)$ ไม่เป็นกรุป เนื่องจาก การลบไม่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

นอกจากนี้เรายังมีบทนิยามอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการนิยามของกรุป ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

1) จะเรียก $(G, *)$ เป็น **กรุปพอยด์** ถ้า G เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G

2) จะเรียก $(G, *)$ เป็น **โมนอยด์** ถ้า G เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G และมีคุณสมบัติเปลี่ยนหมู่และมีเอกลักษณ์

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกต่อไปเมื่อกล่าวถึง กรุป $(G,*)$ จะเขียนเพียงว่า G เป็นกรุป แทนการเขียนเต็ม ๆ ว่า $(G,*)$ เป็นกรุปและแทนการเขียน $a*b$ ด้วย ab เพื่อไม่ก่อให้เกิดการสับสน และอาจจะย้อนกลับมาใช้สัญลักษณ์ $(G,*)$ เป็นครั้งคราว เมื่อต้องการเน้นการดำเนินการทวิภาค $*$ บนกรุป G

ในทำนองเดียวกันจะใช้สำหรับกรณี $(G,*)$ เป็นกรุปพอยด์ กึ่งกรุป และโมนอยด์ด้วย

ในบทนิยามของกึ่งกรุป $(S,*)$ ต่อไปนี้ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ วัฒพงษ์ พันอินากูล (2012) และ ตัวอย่าง 9 ต่อไปนี้ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรม ของ สุทิน ทายะพิทักษ์ (1978) และ ตัวอย่าง 10 จากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ ประสิทธิ์ กิจจนศิริ (2003)

บทนิยาม 2.4 กึ่งกรุป (semigroup) $(S,*)$ หมายถึงเซตไม่ว่าง S พร้อมด้วยการดำเนินการทวิภาค $*$ บน S ซึ่งมีสมบัติ $(a*b)*c = a*(b*c)$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c \in S$

ตัวอย่าง 9

1) $(\mathbb{Z},+)$ เป็นกึ่งกรุป

2) $(\mathbb{Z},-)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป เนื่องจากมีสมาชิก a,b,c ของ I บางตัว ซึ่ง $a-(b-c) \neq (a-b)-c$ เช่น $2-(3-1) \neq (2-3)-1$

3) $(\mathbb{R},+)$ และ $(\mathbb{R},\cdot)$ ต่างเป็นกึ่งกรุป

4) $(\mathbb{R},-)$ และ $(\mathbb{R},\div)$ ต่างไม่เป็นกึ่งกรุป

5) $S = \{0,2,4,6,8\}$ กับการดำเนินการบวกเป็นกรุป

ตัวอย่าง 10

1) $(\mathbb{Z},+)$ เป็นกึ่งกรุป เนื่องจาก บวก เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ และสำหรับทุก ๆ $a,b,c \in \mathbb{Z}, (a+b)+c = a+(b+c)$

2) $(\mathbb{Z},\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป เนื่องจาก $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ และสำหรับทุก ๆ $a,b, \in \mathbb{Z}, (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

3) $(\mathbb{Z}^+,-)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป เนื่องจาก ลบ ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$

4) $(\mathbb{Z},-)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป เนื่องจากแม้ว่า ลบ จะเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ แต่สำหรับทุก ๆ $a,b,c \in \mathbb{Z}, (a-b)-c \neq a-(b-c)$

บทนิยามของกรุปย่อย (subgroup) ต่อไปนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือทฤษฎีกรุปเบื้องต้นของ ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ (2010) และ ตัวอย่าง 11 ต่อไปนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ วัฒพงษ์ พันอินากูล (2012) และ ตัวอย่าง 12 ถึง ตัวอย่าง 15 จากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ วัชรี กาญจน์กีรติ (2008)

บทนิยาม 2.5 ให้ G เป็นกรุป และ H เป็นเซตย่อยของ G $H \leq G$ จะเรียก H ว่า **กรุปย่อย** ของ G ถ้า H เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการของ G ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

i) H มีสมบัติปิดภายใต้การคูณของ G นั่นคือ $ab \in H$ สำหรับทุกๆ $a, b \in H$

ii) $e \in H$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์ของ G

iii) ถ้า $a \in H$ แล้ว $a^{-1} \in H$ เมื่อ a^{-1} เป็นตัวผกผันของ a ใน G

ตัวอย่าง 11

1) $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$

2) $\mathbb{Z}_8$ มีกรุปย่อยทั้งหมดคือ $\{\overline{0}\}, \{\overline{0}, \overline{4}\}, \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ และ $\mathbb{Z}_8$

ตัวอย่าง 12 เนื่องจาก $(\mathbb{R}, *)$ เป็นกรุป และ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ จะพบว่า $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุปด้วย ดังนั้น $(\mathbb{Q}, +)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$

ตัวอย่าง 13 ให้ $G = \{-1, 1, i, -1\}$ จากตัวอย่าง 7 ได้ว่า $(G, \cdot)$ เป็นกรุป ซึ่ง $\{1, -1\}$ เป็นเซตย่อยของ $\{1, -1, i, -i\}$ และ $(\{1, -1\}, \cdot)$ เป็นกรุป ดังนั้น $(\{1, -1\}, \cdot)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$

ตัวอย่าง 14 $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ไม่เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R}, +)$ แม้ว่า $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}$ เนื่องจากมีการดำเนินการทวิภาคที่แตกต่างกัน

ตัวอย่าง 15 ให้ G เป็นกรุปของจำนวนจริงที่ไม่ใช่ 0 กับการคูณ

$H = \{x \in G \mid x = 1$ หรือ x เป็นจำนวนอตรรกยะ $\}$ และ $K = \{x \in G \mid x \geq 1\}$

พบว่า $(H, \cdot)$ ไม่เป็นกรุปย่อยของ $(G, \cdot)$ เนื่องจาก $\sqrt{2} \in H$ แต่ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin H$

และ $(K, \cdot)$ ไม่เป็นกรุปย่อยของ $(G, \cdot)$ เนื่องจาก $2 \in K$ แต่ $2^{-1} \notin K$

บทนิยามของกรุปอาบีเลียน (abelian group) หรือ กรุปสลับที่ (commutative group) ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรมของ รณสรรพ์ ชินรัมย์ (2007) และตัวอย่าง 16 ผู้วิจัยได้ศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรม 1 ของ วัฒพงษ์ พันอินากูล (2012)

บทนิยาม 2.6 จะเรียกกรุป G ว่า **กรุปอาบีเลียน** หรือ **กรุปสลับที่** ถ้า G มีสมบัติสลับที่ นั่นคือ $ab = ba$ สำหรับทุก $a, b \in G$

สำหรับในกรณีที่การดำเนินทวิภาคของกรุปขาดสมบัติสลับที่กรุปดังกล่าวจะถูกเรียกว่า **กรุปไม่อาบีเลียน** (non-abelian group) หรือ **กรุปไม่สลับที่** (non-commutative group)

การที่ใช้คำว่า " กรุปอาบีเลียน " เพื่อเป็นเกียรติให้แก่ นีลส์ เฮนริก อาเบล นักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์

ตัวอย่าง 16

1) $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ และ $(\mathbb{C},+)$ เป็นกรุปสลับที่โดยมี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์และแต่ละสมาชิก x จะมี $-x$ เป็นตัวผกผัน

2) ให้ $M_{m,n}$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $(M_{m,n},+)$ เป็นกรุปสลับที่

3) ให้ M_n เป็นเซตของเมทริกซ์ $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $(M_n,\cdot)$ ไม่เป็นกรุป เนื่องจากมีสมาชิกบางตัวไม่มีตัวผกผัน ให้ $M_n^* = \{A \in M_n \mid det(A) = 0\}$ จะได้ว่า $(M_n^*,\cdot)$ เป็นกรุป แต่จะไม่เป็นกรุปสลับที่

บทนิยามของริง (ring) และตัวอย่าง 17 บทนิยามของไอดีลซ้าย (left ideal) ไอดีลขวา (right ideal) ไอดีล (ideal) ตัวอย่าง 18, 19 และ บทนิยามของไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ตัวอย่าง 20 ที่จะพูดถึงต่อไปนี้ ผู้วิจัยศึกษามาจากหนังสือพีชคณิตนามธรรมของ รณสรรพ์ ชินรัมย์ (2007)

บทนิยาม 2.7 จะเรียก $(R,+,\cdot)$ ว่า **ริง** ถ้า R เป็นเซตไม่ว่าง และ $+$ และ $\cdot$ ต่างก็เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

i) $(R,+)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

ii) $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

iii) สำหรับทุก $a,b,c \in R$

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (กฎแจกแจงซ้าย (left distributive law))

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (กฎแจกแจงขวา (right distributive law))

สำหรับสมบัติข้อ iii) จะอาจเรียกว่า R มี **กฎแจกแจง** (distributive law)

หมายเหตุ

1) นิยมเขียนการดำเนินการทวิภาคตัวแรกบนเซต R ด้วย $+$ และจะเรียกการบวก และตัวที่สองด้วย $\cdot$ และเรียกว่าการคูณ

2) เพื่อความสะดวกต่อไป เมื่อกล่าวถึงริง จะเขียนเพียงสั้น ๆ ว่า R เป็นริง แทนการเขียนเต็ม ๆ ว่า $(R,+,\cdot)$ เป็นริง และเขียนแทน $a \cdot b$ ด้วย ab เมื่อไม่ก่อให้เกิดความสับสนในการกล่าวถึง

3) ในบทนิยาม 2.6 ข้อ 1 ทำให้ได้ว่า R ต้องมีเอกลักษณ์ภายใต้การบวก จะเรียกเอกลักษณ์ภายใต้การบวกนี้ว่า **ศูนย์** (zero) ของ R เขียนแทนด้วย 0 หรือ 0_R

4) การบวกกันของสมาชิก a ตัวเดิมเป็นจำนวน n ตัว จะเขียนเป็น na ซึ่งหมายความว่า $\underbrace{a+a+\cdot+a}_{n\text{ตัว}}$

5) จากบทนิยาม 2.6 ข้อ 2 รู้ว่า $(R,\cdot)$ เป็นเพียงกึ่งกรุปซึ่งอาจไม่มีเอกลักษณ์ก็ได้ ในกรณี $(R,\cdot)$ มีเอกลักษณ์ จะเรียกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณว่า **หนึ่ง** (unity) หรือ **เอกลักษณ์** ของ R เขียนแทนด้วย 1 หรือ 1_R

6) ริงประกอบด้วยสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว คือ 0

ตัวอย่าง 17

1) $(\{0\},+,\cdot)$ เป็นริง และเรียกว่า **ริงชัด** (trivial ring)

2) $(\mathbb{R},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot)$ และ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ เป็นริง

3) สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ เป็นริง

เช่น $M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ เป็นริง

4) สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ เป็นริง ซึ่ง $\mathbb{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\ldots,\overline{n-1}\}$

5) สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า $(n\mathbb{Z},+,\cdot)$ เป็นริง ซึ่ง $n\mathbb{Z}=\{\ldots,-3n,-2n,-n,0,n,2n,3n,\ldots\}$

บทนิยาม 2.8 ให้ R เป็นริง และ I เป็นริงย่อยของ R

1) จะเรียกว่า I **ไอดีลซ้าย** ของ R ถ้า $ra\in I$ สำหรับทุก $a\in I$ และ $r\in R$

2) จะเรียกว่า I **ไอดีลขวา** ของ R ถ้า $ar\in I$ สำหรับทุก $a\in I$ และ $r\in R$

3) จะเรียกว่า I **ไอดีล** ของ R ถ้า $ar\in I$ และ $ra\in I$ สำหรับทุก $a\in I$ และ $r\in R$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง I เป็นไอดีลของ R ถ้า I เป็นทั้งไอดีลซ้ายและไอดีลขวาของ R

ข้อสังเกต

1) ในการนิยามไอดีล ไอดีลซ้าย และไอดีลขวา ของริง เราอาจเปลี่ยนเงื่อนไขของ I ได้ จาก I เป็นริงย่อยของ R เป็นเงื่อนไขที่เบากว่า คือ I เป็นกรุปย่อยภายใต้การบวกของ R ได้

2) ในการแสดงว่า I เป็นไอดีลของริง เราอาจเปลี่ยนการแสดงเงื่อนไข I ได้ จาก $ar\in I$ และ $ra\in I$ สำหรับทุก $a\in I$ และ $r\in R$ เป็นการแสดงเงื่อนไข $RI\subseteq I$ และ $IR\subseteq I$ ได้ และการนิยามไอดีลซ้ายและไอดีลขวาของริงก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 18 ในริง $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ จะได้ว่า $n\mathbb{Z}=\{nx\mid x\in\mathbb{Z}\}$ เป็นไอดีลของ $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 19 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ เป็นริงย่อยของ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ แต่จะไม่เป็นไอดีลของ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ เนื่องจาก $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ และ $5 \in \mathbb{Z}$ แต่ $\frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

บทนิยาม 2.9 ให้ R เป็นริงสลับที่มีเอกลักษณ์ จะเรียกไอดีล P ของ R โดยที่ $P \neq R$ ว่า **ไอดีลเฉพาะ** ของ R ถ้า สำหรับทุก $a, b \in R$ ถ้า $ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$

ตัวอย่าง 20 พิจารณาริง $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

1) $\{0\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$

2) สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p จะได้ว่า $p\mathbb{Z}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$

บทนิยามกึ่งกรุปไตรภาค (ternary semigroups) และ บทนิยามของไอดีลเฉพาะของ S และตัวอย่าง 21 ผู้วิจัยได้ศึกษาจากผลงานวิจัยเรื่อง Some Ideals Of Ternary Semigrours ของ Kar and Maity (2011)

บทนิยาม 2.10 กึ่งกรุปไตรภาค $S = (S; \cdot)$ คือโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตไม่ว่าง S และตัวดำเนินการไตรภาค $\cdot$ บนเซต S ที่คล้องสอดสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ ถ้า $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c, d, e \in S$

บทนิยาม 2.11 ไอดีลแท้ P ของกึ่งกรุปไตรภาค S เรียกว่า **ไอดีลเฉพาะ** ของ S ถ้าสำหรับทุก ๆ ไอดีล A, B, C ของ S ถ้า $ABC \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$ หรือ $C \subseteq P$

ตัวอย่าง 21 พิจารณากึ่งกรุปไตรภาค $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ ซึ่งมีสมบัติสลับที่

1) ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}^-$ ซึ่ง $xyz \in P = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}^-\}$ ดังนั้น $xyz = 3k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}^-$ จะได้ว่า $3 \mid x$ หรือ $3 \mid y$ หรือ $3 \mid z$ นั่นคือ $x = 3k_1$ หรือ $y = 3k_2$ หรือ $z = 3k_3$ สำหรับบาง $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^-$ ดังนั้น $x \in P$ หรือ $y \in P$ หรือ $z \in P$ ทำให้สรุปได้ว่า $P = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}^-\}$

2) ให้ไอดีลเฉพาะ $\mathbb{Q} = \{30k : k \in \mathbb{Z}^-\}$ จะได้ว่า $\mathbb{Q}$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}^-$ เนื่องจาก $(-2)(-3)(-5) = -30 \in \mathbb{Q}$ แต่ $(-2) \notin \mathbb{Q}, (-3) \notin \mathbb{Q}$ และ $(-3) \notin \mathbb{Q}$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Kasner (1904) ได้ศึกษาเกี่ยวกับลักษณะทั่วไปของโครงสร้างพีชคณิตแบบดั้งเดิม เช่น โครงสร้าง n-วิภาค

Sioson (1963) ได้ศึกษาเกี่ยวกับกึ่งกรุป n-วิภาคปกติและศึกษาสมบัติของกึ่งกรุป n-วิภาค

Sioson (1965) ได้ศึกษาทฤษฎีของไอดีลในกึ่งกรุปไตรภาค และ ได้ริเริ่มแนวคิดของกึ่งกรุปไตรภาคปกติ และแสดงลักษณะพิเศษ โดยใช้สมบัติของ 3-ไอดีล

Dudek and Grozdinska (1980) ได้ศึกษาเกี่ยวกับธรรมชาติของกึ่งกรุป n-วิภาคปกติ

Santiago (1983) , Kar and Maity (2011) ได้พัฒนาทฤษฎีของกึ่งกรุปไตรภาค

Grzymala-Busse (2011) ได้นำทฤษฎีของระบบ n-วิภาค ไปประยุกต์ใช้ เช่น การประยุกต์ใช้ในทฤษฎีออโตมาตาและการประยุกต์ใช้ในวิชาฟิสิกส์

Dudek (2011) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทและให้ตัวอย่างเกี่ยวกับกรุป n-วิภาคไว้มากมาย และ ได้ศึกษาสมบัติของไอดีลที่เกี่ยวกับองค์ประกอบบางประการของ กึ่งกรุป n-วิภาค ($n \geq 3$) ที่มีสมาชิกเป็นนิจพล

Wang, Zhou, and Zhan (2017) ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างกึ่งกรุป n-วิภาคปกติแบบอ่อนและกึ่งกรุป n-วิภาคปกติ

ภัทราวรรณ เพชรแก้ว และ รณสรรพ์ ชินรัมย์ (2018) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ minimality และ maximality ของ n-ไอดีลในกึ่งกรุป n-วิภาค

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

โครงงานวิจัยเรื่องไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค มีวิธีดำเนินการวิจัยตามขั้นตอน ดังนี้

1) ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับกึ่งกรุป กึ่งกรุปไตรภาคและกึ่งกรุป n-วิภาค

2) ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับไอดีลในกึ่งกรุป ไอดีลในกึ่งกรุปไตรภาคและไอดีลในกึ่งกรุป n-วิภาค

3) ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารต่าง ๆ ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาค

4) ทำการศึกษาสมบัติบางประการของไอดีล ไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค โดยประยุกต์จากสมบัติของไอดีลเฉพาะในริง กึ่งริง กึ่งกรุปและกึ่งกรุปไตรภาค

5) ขยายแนวคิดเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

บทที่ 4

ไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาค ซึ่งได้ขยายแนวคิดและความสัมพันธ์ของไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปและไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุปไตรภาคไปเป็นไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค ได้ดังผลการวิจัยดังต่อไปนี้

4.1 ผลลัพธ์

บทนิยาม 4.1 $S = (S,f)$ คือ โครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตไม่ว่าง S และตัวดำเนินการ n-วิภาค $f(f : S^n \to S)$ บนเซต S และสำหรับสมาชิก $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ ในเซต S จะเขียน x_i^j แทน $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ ในกรณีที่ $x_{i+1} = x_{i+2} = ... = x_{i+t}$ จะเขียน x^t แทน x_{i+1}^{i+t} และจะเขียนแทน $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ด้วย $f(x_1^n)$ จะเรียก (S,f) ว่า **กึ่งกรุป *n*-วิภาค** (n-ary semigroup) ถ้า S สอดคล้องกับสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ

$$f(x_1^{i-1}, f(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) = f(x_1^{j-1}, f(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1})$$

สำหรับทุก $x_1, x_2, ..., x_{2n-1} \in S$ และสำหรับทุก $1 \le i \le j \le n$

ข้อสังเกต จากบทนิยามของกึ่งกรุป n-วิภาค

1) ถ้าให้ $n = 2$, กึ่งกรุป 2-วิภาค (2-ary semigroup) ก็คือ กึ่งกรุป

2) ถ้า $n = 3$, กึ่งกรุป 3-วิภาค (3-ary semigroup) ก็คือ กึ่งกรุปไตรภาค

ดังนั้น ในงานวิจัยชิ้นนี้ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 จึงกล่าวได้ว่า งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการวางนัยทั่วไปของงานวิจัยในกึ่งกรุป และเป็นการวางนัยทั่วไปของงานวิจัยในกึ่งกรุปไตรภาค

ตัวอย่าง 22

1) $(\mathbb{Z}_0^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป 2-วิภาค หรือ กึ่งกรุป

2) $(\mathbb{Z}_0^-, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป 3-วิภาค หรือ กึ่งกรุปไตรภาค

3) $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป 4-วิภาค (4-ary semigroup)

4) $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป 5-วิภาค (5-ary semigroup)

5) $(\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{Q}, +)$ เป็นกึ่งกรุป n-วิภาค สำหรับจำนวนเต็ม $n \ge 2$

บทนิยาม 4.2 ให้ (S,f) เป็นกึ่งกรุป n-วิภาคและให้ H เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ S ภายใต้การดำเนินการ n-วิภาค f ถ้าสำหรับทุก $x_1, x_2, ..., x_n \in H$ ได้ว่า $f(x_1^n) \in H$ แล้ว จะเรียก (H,f) ว่า **กึ่งกรุปย่อย n-วิภาค** ของ (S,f)

บทนิยาม 4.3 ให้ I เป็นเซตไม่ว่างของกึ่งกรุป n-วิภาค S จะเรียก I ว่า ***i*-ไอดีล** ของ S ถ้าสำหรับทุก $x_i, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in S$ และ $a \in I$ แล้ว $f(x_1^{i-1}, a, x_{i+1}^n) \in I$

บทนิยาม 4.4 ให้ I เป็นเซตไม่ว่างของกึ่งกรุป n-วิภาค S จะเรียก I ว่า **ไอดีล** ของ S ถ้า I เป็น i-ไอดีลของ S ทุก $1 \le i \le n$

บทนิยาม 4.5 ให้ P เป็นไอดีลของกึ่งกรุป n-วิภาค S ที่ไม่เท่ากับ S จะเรียก P ว่า **ไอดีลเฉพาะ** ของ S ก็ต่อเมื่อ ถ้าสำหรับทุก $a_1, a_2, ..., a_n \in S$ และ $a_1 a_2 ... a_n \in P$ แล้ว $a_i \in P$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, ..., n\}$

ตัวอย่าง 23 พิจารณากึ่งกรุป 5-วิภาค $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ ซึ่งมีสมบัติสลับที่

ให้ $P = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}^-\}$ จะแสดงว่า P เป็นไอดีลเฉพาะ

ให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Z}^-$ และ $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \in P = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ดังนั้น $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 5k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}^-$

เนื่องจาก $5 \mid 5k$ ดังนั้น $5 \mid a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

เนื่องจาก 5 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $5 \mid a_i$ สำหรับบาง $1 \le i \le 5$

จะได้ว่า $a_i = 5l_i$ สำหรับบาง $l_i \in \mathbb{Z}^-$

ดังนั้น $a_i \in P$ สำหรับบาง $1 \le i \le 5$

เราสามารถสรุปได้ว่า $P = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}^-\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $\{P_i\}$ เป็นเซตของไอดีล ในกึ่งกรุป n-วิภาค จะได้ว่า $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ เป็นไอดีล

พิสูจน์ i) ให้ $\{P_i\}$ เป็นเซตของไอดีลในกึ่งกรุป n-วิภาค

จะแสดงว่า $\cup P_i$ เป็นไอดีลของ S

ให้ $a \in \cup P_i$ ดังนั้น $a \in P_j$ สำหรับบาง j

ให้ $x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n \in S$ ดังนั้น จะได้ว่า $f(x_1^{j-1}, a, x_{j+1}^n) \in P_j$

เนื่องจาก P_j เป็นไอดีลของ S จะได้ว่า $f(x_1^{j-1}, a, x_{j+1}^n) \in P_j \subseteq \cup P_i$

ดังนั้น จะได้ว่า $\cup P_i$ เป็นไอดีลของ S

ii) ต่อไปจะแสดงว่า $\cap P_i$ เป็นไอดีลของ S

ให้ $b \in \cap P_i$ ดังนั้น $b \in P_i$ สำหรับทุก i

ให้ $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in S$ ดังนั้น $f(x_1^{i-1}, b, x_{i+1}^n) \in P_i$ เนื่องจาก P_i เป็นไอดีลของ S

จะได้ว่า $f(x_1^{i-1}, b, x_{i+1}^n) \in P_i$ สำหรับทุก i ดังนั้น จะได้ว่า $f(x_1^{i-1}, b, x_{i+1}^n) \in \cap P_i$
ดังนั้น $\cap P_i$ เป็นไอดีลของ S □

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ $\{P_i\}$ เป็นเซตของไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค S (prime ideal in n-ary semigroup S) จะได้ว่า $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ เป็นไอดีล ของ S

พิสูจน์ ให้ $\{P_i\}$ เป็นเซตของไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาคของ S
ดังนั้น P_i ก็จะเป็นไอดีลของ S สำหรับทุก i
จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ เป็นไอดีล ของ S □

จากทฤษฎีบท 4.2 จะได้ว่า ให้ $\{P_i\}$ เป็นเซตของไอดีลเฉพาะ ในกึ่งกรุป n-วิภาค S จะได้ว่า $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ เป็นไอดีล ของ S แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นไอดีลเฉพาะ ของ S ในกรณีทั่ว ๆ ไป ดังที่จะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 24 พิจารณากึ่งกรุป 3-วิภาค $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$

จะได้ว่า $2\mathbb{Z}^-, 3\mathbb{Z}^-, 5\mathbb{Z}^-$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ แต่ $2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^-$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะของ $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$

วิธีทำ เนื่องจาก $2\mathbb{Z}^- = \{-2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -16, -18, -20, -22, -24, -26, -28, -30, ...\}$

$3\mathbb{Z}^- = \{-3, -6, -9, -12, -15, -18, -21, -24, -27, -30, ...\}$

$5\mathbb{Z}^- = \{-5, -10, -15, -20, -25, -30, ...\}$

ดังนั้น $2\mathbb{Z}^- \cup 3\mathbb{Z}^- \cup 5\mathbb{Z}^- = \{-2, -3, -4, , -5, -6, -8, -9, -10, -12, -14, -15, -16, -18, -20, -21, -22, -24, -25, -26, -27, -28, -30, ...\}$

ดังนั้น $2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^- = \{-30, -60, -90, -120, ...\}$

เนื่องจาก $(-2)(-3)(-5) = -30 \in 2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^-$

แต่ $-2 \notin 2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^-$, $-3 \notin 2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^-$ และ $-5 \notin 2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^-$

ดังนั้น $2\mathbb{Z}^- \cap 3\mathbb{Z}^- \cap 5\mathbb{Z}^-$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}^-$

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ $\{P_i\}$ เป็นเซตของไอดีลเฉพาะ ในกึ่งกรุป n-วิภาค S และ $\{P_i\}$ อยู่ในลูกโซ่เดียวกัน แล้วจะได้ว่า $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ เป็นไอดีลเฉพาะของ S

พิสูจน์ i) จะแสดงว่า $\cap P_i$ เป็นไอดีลเฉพาะของ S
จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\cap P_i$ เป็นไอดีลของ S
$a_1, a_2, ..., a_n \in S$ โดยที่ $a_1 a_2 ... a_n \in P$

จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ $a_1 \notin \cap P_i, a_2 \notin \cap P_i, a_3 \notin \cap P_i, ..., a_n \notin \cap P_i$

ดังนั้น จะมี $i+1, i+2, ..., i+n$ ซึ่ง $a_1 \notin \cap P_{i+1}, a_2 \notin \cap P_{i+2}, a_3 \notin \cap P_{i+3}, ..., a_n \notin \cap P_{i+n}$

เนื่องจาก $\{P_i\}$ เป็นลูกโซ่ ให้ $P_{i+1} \subseteq P_{i+2} \subseteq P_{i+3} \subseteq ... \subseteq P_{i+n}$

เนื่องจาก $a_1 a_2 ... a_n \in \cap P_i = P_{i+1}$ และเนื่องจาก P_{i+1} เป็นไอดีลเฉพาะ

จะได้ว่า $a_1 \in P_{i+1}$ หรือ $a_2 \in P_{i+1}$ หรือ $a_3 \in P_{i+1}$ หรือ ... หรือ $a_n \in P_{i+1}$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $a_1 \in \cap P_i$ หรือ $a_2 \in \cap P_i$ หรือ $a_3 \in \cap P_i$ หรือ ... หรือ $a_n \in \cap P_i$

เนื่องจาก $\cap P_i = P_{i+1}$

ดังนั้น $\cap P_i$ เป็นไอดีลเฉพาะ

ii) ต่อไปจะแสดงว่า $\cup P_i$ เป็นไอดีลเฉพาะของ S

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\cup P_i$ เป็นไอดีล S

$a_1, a_2, ..., a_n \in S$ โดยที่ $a_1 a_2 ... a_n \in P_i$

จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ $a_1 \notin \cup P_i, a_2 \notin \cup P_i, a_3 \notin \cup P_i, ..., a_n \notin \cup P_i$

ดังนั้น จะมี $i+1, i+2, ..., i+n$ ซึ่ง $a_1 \notin \cup P_{i+1}, a_2 \notin \cup P_{i+2}, a_3 \notin \cup P_{i+3}, ..., a_n \notin \cup P_{i+n}$

เนื่องจาก $\{P_i\}$ เป็นลูกโซ่ ให้ $P_{i+1} \subseteq P_{i+2} \subseteq P_{i+3} \subseteq ... \subseteq P_{i+n}$

เนื่องจาก $a_1 a_2 ... a_n \in \cup P_i = P_{i+n}$ และเนื่องจาก P_{i+1} เป็นไอดีลเฉพาะ

จะได้ว่า $a_1 \in P_{i+n}$ หรือ $a_2 \in P_{i+n}$ หรือ $a_3 \in P_{i+n}$ หรือ ... หรือ $a_n \in P_{i+n}$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $a_1 \in \cup P_i$ หรือ $a_2 \in \cup P_i$ หรือ $a_3 \in \cup P_i$ หรือ ... หรือ $a_n \in \cup P_i$

เนื่องจาก $\cup P_i = P_{i+n}$ ดังนั้น $\cup P_i$ เป็นไอดีลเฉพาะ □

ทฤษฎีบท 4.4 ถ้า I เป็นไอดีลของกึ่งกรุป n-วิภาค S และ P เป็นไอดีลเฉพาะของ S แล้ว $I \cap P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ I

พิสูจน์ สมมติให้ I เป็นไอดีลของกึ่งกรุป n-วิภาค S และ P เป็นไอดีลเฉพาะของกึ่งกรุป n-วิภาค S ให้

$a \in I \cap P$ และ ให้ $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in I \subseteq S$

จะได้ว่า $f(x_1^{i-1}, a, x_{i+1}^n) \in I$ เนื่องจาก I เป็นไอดีลของ S

และ $f(x_1^{i-1}, a, x_{i+1}^n) \in P$ เนื่องจาก P เป็นไอดีลของ S

ดังนั้น $f(x_1^{i-1}, a, x_{i+1}^n) \in I \cap P$ ดังนั้น $I \cap P$ เป็นไอดีลของ I

ต่อไปจะแสดงว่า $I \cap P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ I

ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in I \subseteq S$ ซึ่ง $a_1 a_2 a_3 ... a_n \in I \cap P$

ดังนั้น $a_1a_2a_3...a_n \in I$ และ $a_1a_2a_3...a_n \in P$ เนื่องจาก P ไอดีลเฉพาะของ S

และ $a_1a_2a_3...a_n \in P$ จะได้ว่า $a_j \in P$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

เนื่องจาก $a_j \in I$ จะได้ว่า $a_j \in I \cap P$ ดังนั้น $I \cap P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ I □

บทนิยาม 4.6 ให้ Q เป็นไอดีลเฉพาะแท้ของกึ่งกรุป n-วิภาค S จะเรียก Q ว่า **กึ่งเฉพาะ** (semiprime) ของ S ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $x \in S$, ถ้า $x^n \in Q$ แล้ว $x \in Q$

บทนิยาม 4.7 ให้ I เป็นไอดีลเฉพาะแท้ของกึ่งกรุป n-วิภาค S จะเรียก I ว่า **ลดทอนไม่ได้อย่างอ่อน** (weakly irreducible) ก็ต่อเมื่อ ถ้าสำหรับไอดีล H และไอดีล K ของ $S, H \cap K = I$ แล้วจะได้ว่า $I = H$ หรือ $I = K$

บทนิยาม 4.8 ให้ I เป็นไอดีลเฉพาะแท้ของกึ่งกรุป n-วิภาค S จะเรียก I ว่า **ลดทอนไม่ได้อย่างเข้ม** (strongly irreducible) ถ้า สำหรับไอดีล H และไอดีล K ของ $S, H \cap K \subseteq I$ แล้ว จะได้ว่า $I \subseteq H$ หรือ $I \subseteq K$

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ P เป็นไอดีลเฉพาะแท้ (proper prime ideal) ของกึ่งกรุป n-วิภาค S ถ้า P จะเป็นไอดีลเฉพาะของ S แล้ว P เป็นกึ่งเฉพาะของ S และเป็นลดทอนไม่ได้อย่างเข้ม

พิสูจน์ สมมติให้ P เป็นไอดีลเฉพาะของ S จะแสดงว่า P เป็นกึ่งเฉพาะของ S และเป็นลดทอนไม่ได้อย่างเข้ม ให้ $x \in S$ ซึ่ง $x^n \in P$ เนื่องจาก P เป็นไอดีลเฉพาะของ S ดังนั้น $x \in P$

ดังนั้น เราจะได้ว่า P เป็นกึ่งเฉพาะของ S

สมมติให้ H และ K เป็นไอดีลของ S ซึ่ง $H \cap K \subseteq P$

เนื่องจาก P เป็นไอดีลเฉพาะแท้ของ S ดังนั้น $S - P \neq \phi$

ให้ $a_1, a_2, ..., a_{n-2} \in S - P$ และ $h \in H, k \in K$

เนื่องจากว่า H เป็นไอดีลของ S ดังนั้น $a_1a_2...a_{n-2}hk \in H$

เนื่องจากว่า K เป็นไอดีลของ S ดังนั้น $a_1a_2...a_{n-2}hk \in K$

ดังนั้น $a_1a_2...a_{n-2}hk \in H \cap K$

เนื่องจาก $H \cap K \subseteq P$ ดังนั้น $a_1a_2...a_{n-2}hk \in P$

เนื่องจาก P เป็นไอดีลเฉพาะของ S และ $a_1, a_2, ..., a_{n-2} \notin P$

ดังนั้น จะได้ว่า $h \in P$ หรือ $k \in P$

เนื่องจาก h และ k เป็นสมาชิกใดๆใน H และ K ดังนั้น จะได้ว่า $H \subseteq P$ หรือ $K \subseteq P$

ดังนั้น P เป็น ลดทอนไม่ได้อย่างเข้ม ดังนั้น จะสามารถสรุปได้ว่า P เป็นไอดีลเฉพาะของ S และ P เป็นกึ่งเฉพาะและลดทอนไม่ได้อย่างเข้ม

□

บทที่ 5

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ เราได้ศึกษาบางโครงสร้างพีชคณิตเกี่ยวกับกึ่งกรุป n-วิภาค และหนึ่งในนั้นที่สำคัญ คือ ไอดีลเฉพาะ บทนิยามของไอดีลเฉพาะ นิยามโดยใช้เซตปกติแต่กำหนดโดยใช้ส่วนประกอบ ถ้าพิจารณาภายใต้เงื่อนไขการสลับที่ ตัวอย่างเช่น P เป็นไอดีลเฉพาะของกึ่งกรุป n-วิภาค S สำหรับทุก ๆ $A_1, A_2, ..., A_n \in S, A_1A_2...A_n \in P$ นั่นคือ $A_i \in P$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, ..., n\}$ อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้เราพิจารณาภายใต้เงื่อนไขการสลับที่ เรากำหนดให้ P เป็นไอดีลเฉพาะของการสลับที่กึ่งกรุป n-วิภาค S สำหรับทุก ๆ $a_1, a_2, ..., a_n \in S, a_1a_2...a_n \in P$ นั่นคือ $a_i \in P$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, ..., n\}$ อย่างไรก็ตาม บางผลการวิจัยเป็นจริงในทั้งกรณีสลับที่และไม่สลับที่

จากผลการวิจัย เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $\{P_i\}$ เป็นกลุ่มของไอดีลเฉพาะในกึ่งกรุป n-วิภาค S ดังนั้น $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ เป็นไอดีลของ S แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นไอดีลเฉพาะของ S ในกรณีทั่วไป อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้เราพิสูจน์แล้วว่า $\cup P_i$ และ $\cap P_i$ ต้องเป็นไอดีลเฉพาะของกึ่งกรุป n-วิภาค S ถ้า $\{P_i\}$ เป็นรูปแบบห่วงโซ่ จากนั้นเราได้กำหนดว่า ถ้า I เป็นไอดีลของกึ่ง n-วิภาค S และ P เป็นไอดีลเฉพาะของ S ดังนั้น $I \cap P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ I ในทฤษฎีบทสุดท้ายเราจะได้ว่า ถ้า P เป็นไอดีลเฉพาะแท้ของกึ่งกรุป n-วิภาค S ดังนั้น P เป็นกึ่งเฉพาะและลดทอนไม่ได้อย่างเข้ม

ภาคผนวก A

เอกสารอ้างอิง

ภัทราวรรณ เพชรแก้ว และ รณสรรพ์ ชินรัมย์. (2018). The minimality and maximality of n-ideals in n-ary semigroups. *European Journal of Pure Applied Mathematics*, *11*(3), 762-773.

สุทิน ทายะพิทักษ์. (1978). *พีชคณิตนามธรรม*. กรุงเทพฯ: รุ่งเรืองรัตน์.

ประสิทธิ์ กิจจนศิริ. (2003). *พีชคณิตนามธรรม 1*. สถาบันราชภัฏเชียงใหม่: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

รณสรรพ์ ชินรัมย์. (2007). *พีชคณิตนามธรรม*. มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์: คณะวิทยาศาสตร์.

วัชรี กาญจน์กีรติ. (2008). *พีชคณิตนามธรรม*. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2010). *ทฤษฎีกรุงเบื้องต้น*. มหาวิทยาลัยศิลปากร: คณะวิทยาศาสตร์.

วัฒพงษ์ พันอินากูล. (2012). *พีชคณิตนามธรรม 1*. มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี: คณะวิทยาศาสตร์.

Dudek, W. A. (2011). Idempotents in n-ary semigroups. *Southeast Asian Bullein of Mathematics*, *25*, 97-104.

Dudek, W. A., & Grozdinska, I. (1980). On ideals in regular n-ary semigrouqs. *Matematichki Bilten*, *4*, 25-44.

Grzymala-Busse, J. W. (2011). Automrphisms of polyadic automata. *Journal of the Association for Computing Machinery*, *16*, 208-219.

Kar, S., & Maity, B. K. (2011). An extension of the group concepts. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Al.I. Cuza Din Ian Iasi (S.N.) Matematica*, *2*, 247-258.

Kasner, R. (1904). An extension of the group concepts. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *10*, 290-291.

Santiago, M. L. (1983). Some contribution to the study of ternary semigroups and semiheaps. *Ph.D.Thesis, University of Madras, India*.

Sioson, F. M. (1963). On regular algebraic systems. *Proceedings of the Japan Academy*, *39*, 283-286.

Sioson, F. M. (1965). Ideal theory in ternary semigroups. *Math. Japon*, *10*, 63-84.

Wang, Q., Zhou, X., & Zhan, J. (2017). A novel study of soft sets over n-ary semigroups. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *37*, 583-594.