รายงานวิจัย

แบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

SIQS Epidemic Model with Treatment and Imperfect Quarantine

ศิวะกานต์ บัวศรี

อัยลดา สุพร

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

2561

ใบรับรองงานวิจัย

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ชื่อเรื่องงานวิจัย แบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

SIQS Epidemic Model with Treatment and Imperfect Quarantine

ชื่อผู้ทำงานวิจัย ศิวะกานต์ บัวศรี และ อัยลดา สุพร

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัย

.....อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี)

.....ประธานกรรมการสอบ
(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(อาจารย์สายใจ เพชรคงทอง)

.....กรรมการสอบ
(อาจารย์อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหน่อง)

.....กรรมการสอบ
(อาจารย์ธีรพล บัวทอง)

.....ประธานหลักสูตร
(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุมัติ เดชนะ)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เมื่อวันที่.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

ชื่อเรื่อง แบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

ชื่อผู้ทำงานวิจัย ศิวะกานต์ บัวศรี รหัสนักศึกษา 584254026

อัยลดา สุพร รหัสนักศึกษา 584254040

อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม อาจารย์สายใจ เพชรคงทอง

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

สถาบัน มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

ปีการศึกษา 2561

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาแบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ โดยแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ และกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองนี้มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ เสถียรภาพของจุดสมดุลขึ้นอยู่กับค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) กล่าวคือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับเมื่อ $R_0 < 1$ และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับเมื่อ $R_0 > 1$ และงานวิจัยนี้ยังได้แสดงผลเชิงตัวเลขเพื่อตรวจสอบผลเชิงทฤษฎีของแบบจำลอง รวมทั้งยังได้วิเคราะห์ผลกระทบของประสิทธิภาพการคัดแยกต่อการแพร่ระบาดของโรค

คำสำคัญ: แบบจำลองโรคระบาด *SIQS* เสถียรภาพ ค่าระดับการติดเชื้อ การคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ การรักษา

Project Title	*SIQS* Epidemic Model with Treatment and Imperfect Quarantine
Authors	Siwakarn Buasri Student ID 584254026
	Ailada Suporn Student ID 584254040
Advisor	Lect. Dr.Sirachat Tipsri
Co-Advisor	Lect. Sayjai Petchkongthong
Bachelor of Science	Program in Mathematics
Institute	Songkhla Rajabhat University
Academic Year	2561

ABSTRACT

This study aims to develop *SIQS* epidemic model with treatment and imperfect quarantine. Dividing the population into three groups include susceptible infected and quarantine individuals. The model exhibits two equilibriums, disease-free and endemic equilibriums. The stability equilibrium depend on basic reproductive number (R_0) The results found that the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$ and the endemic equilibrium is locally asymptotically stable when $R_0 > 1$ Furthemore, this research presents numerical simulations results to verify theoretical results of the model. The effect of efficient of the quarantine is analyzed on spread of the disease.

Keywords: *SIQS* epidemic model, basic reproductive number, stabillity, imperfect quarantine, treatment

คำนำ

รายงานการศึกษาโครงงานทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาวิชา 4574902 โครงงานทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง และวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองเพื่อให้สอดคล้องกับค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองที่มีเสถียรภาพพื้นฐานของแบบจำลองที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี ผู้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำและช่วยเหลือในการทำโครงงานครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดีและผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่ารายงานเล่มนี้จะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อผู้ที่สนใจหากรายงานฉบับนี้มีข้อผิดพลาดประการใดก็ขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ศิวะกานต์ บัวศรี และ อัยลดา สุพร

เมษายน 2562

SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

กิตติกรรมประกาศ

การดำเนินโครงงาน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีทั้งนี้เพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้ทรงความรู้หลาย ๆ ท่านโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน และอาจารย์สายใจ เพชรคงทอง อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมที่ได้เสียสละเวลาเพื่อให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ จนกระทั่งโครงงานฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์และขอขอบคุณเพื่อน ๆ ในสาขาวิชาคณิต-ศาสตร์ทุกคนที่คอยให้คำแนะนำ และให้กำลังใจ รวมถึงการช่วยเหลือที่มีให้กันมาตลอด

สุดท้าย ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อคุณแม่ที่คอยดูแลและให้โอกาสทางการศึกษาและเป็นกำลังใจสำคัญที่สุดที่ทำให้โครงงานฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

ศิวะกานต์ บัวศรี และ อัยลดา สุพร

เมษายน 2562

SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ก
Abstract	ข
คำนำ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญ	จ
สารบัญตาราง	ช
สารบัญรูป	ซ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 จุดประสงค์	2
1.3 ขอบเขตการศึกษา	2
1.4 แผนดำเนินการศึกษา	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎี เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
2.1 ความรู้เกี่ยวกับโรคระบาด	4
2.2 ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน	6
2.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาดโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป	6
2.4 จาโคเบียน (Jacobian)	8
2.5 ระบบสมการเชิงเส้น และทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์	8
2.6 การหารากของ Routh- Hurwitz	9
2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	10
บทที่ 3 แบบจำลองโรคระบาดและการวิเคราะห์	12
3.1 การพัฒนาแบบจำลองโรคระบาด	12
3.2 วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง	14

หน้า

บทที่ 4 ผลเชิงตัวเลข 20
4.1 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง 20
4.2 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง 21

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ 23
5.1 สรุปผลการวิจัย 23
5.2 ข้อเสนอแนะ 23

เอกสารอ้างอิง 24

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
3.1	พารามิเตอร์และความหมายของพารามิเตอร์	12
4.1	พารามิเตอร์ของแบบจำลอง *SIQS*	20

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
3.1	แผนภาพแสดงแนวการคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	13
4.1	ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta_1 = 0.005$ จะได้ $R_0 < 1$	21
4.2	ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta_1 = 0.01$ จะได้ $R_0 > 1$	22

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

โรคระบาดเป็นปัญหาทางด้านสาธารณสุขที่มีความสำคัญทำให้มีผู้ป่วยในแต่ละปีมีจำนวนมากและอาจรุนแรงขึ้นเป็นสาเหตุทำให้เสียชีวิต ปัจจัยสำคัญที่ทำให้มีการระบาดและมีการขยายพื้นที่เกิดโรคออกไปอย่างกว้างขวางและรวดเร็ว ได้แก่ การเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรโดยเฉพาะชุมชนเมืองเกิดขึ้นจำนวนมาก มีการเคลื่อนย้ายถิ่นของประชากร ปัจจัยเหล่านี้ทำให้การแพร่กระจายของเชื้อเป็นไปได้อย่างรวดเร็วและส่งผลกระทบให้เกิดความเสียหายต่อประเทศหลายด้าน เช่น ด้านสาธารณสุข เศรษฐกิจ อุตสาหกรรม เป็นต้น การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นอีกหนึ่งวิธีที่สามารถป้องกัน และควบคุมการ ระบาดของโรคได้เนื่องจากสามารถรายงานลักษณะการระบาดของโรค ช่วงระยะเวลาของการระบาดของโรค ความรุนแรงของโรคสามารถพยากรณ์จำนวนผู้ที่ติดเชื้อ และยังสามารถหามาตรการเฝ้าระวังหรือควบคุมการระบาดของโรคต่าง ๆ โดยใช้แบบจำลองการระบาดซึ่งเรียกว่า แบบจำลองโรคระบาด แม้ว่าบางโรคจะไม่ทำอันตรายถึงชีวิตแต่ทำให้ได้รับความทุกข์ทรมานและความรำคาญใจจากอาการต่าง ๆ ได้เช่นกัน ดังนั้นการป้องกันจึงมีความสำคัญในการรักษาสุขภาพให้แข็งแรงโดยการออกกำลังกายสม่ำเสมอ รับประทานอาหารที่มีประโยชน์ถูกสุขลักษณะ พักผ่อนให้เพียงพอ การป้องกันการระบาดของโรค ได้แก่ การรักษาและการคัดแยกผู้ป่วยที่ติดเชื้อ ซึ่งจะส่งผลให้อัตราการระบาดของโรคลดลง

การรักษาเป็นส่วนสำคัญในการป้องกันและควบคุมหรือลดการแพร่กระจายของเชื้อโรค เช่น การฉีดยา การรับประทานยา การฉายรังสี เป็นต้น จะทำให้ลดการแพร่กระจายของเชื้อและลดการเกิดโรคระบาดในเขตหรือชุมชนที่เสี่ยงต่อการเกิดโรค

นอกจากนี้ยังมีอีกหนึ่งวิธีที่สามารถป้องกันการระบาดของโรค คือ การคัดแยก เป็นการแยกผู้ป่วยที่เป็นแหล่งของเชื้อโรคออกจากผู้อื่น เพื่อไม่ให้แพร่เชื้อไปสู่ผู้ป่วยที่อยู่ใกล้ชิด (Infectious Isolation) และโดยการแยกผู้ป่วยที่มีภูมิคุ้มกันโรคต่ำ หรือติดเชื้อได้ง่ายให้อยู่ในสิ่งแวดล้อมที่ปราศจากเชื้อโรคหรือมีเชื้อโรคน้อย (Protective Isolation) (สมหวัง ด่านชัยวิจิตร ,เสน่ห์ เจียสกุล ,ศรีเบญจา ไวทยพิเชษฐ์,ทวีสุข ปทุมานุสสรณ์, 2018) และในบางครั้งการคัดแยกผู้ป่วยอาจจะไม่สมบูรณ์เนื่องจากปัญหาที่พบในการคัดแยก เช่น ผู้ป่วยไม่ปฏิบัติตามที่หมอบอก และหมอไม่สามารถดูแลผู้ป่วยได้อย่างทั่วถึงทุกคน จึงทำให้ผู้ป่วยที่เป็นโรคสามารถแพร่เชื้อไปยังบุคคลอื่นได้

จากที่ได้ศึกษาทำให้ผู้วิจัยเกิดความสนใจที่จะพัฒนาแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ ซึ่งในงานวิจัยครั้งนี้ได้แบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ S แทนกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ I แทนกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ และ Q แทนกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพและคำนวณผลเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันผลในทางทฤษฎี

1.2 จุดประสงค์

1) เพื่อพัฒนาแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

2) เพื่อหาจุดสมดุลของแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

3) เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

4) แสดงผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1) ศึกษาแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

2) หาจุดสมดุลของแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

3) วิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์

1.4 แผนดำเนินการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ.2561						พ.ศ.2562	
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	■							
2. พัฒนางานวิจัย		■	■					
3. สรุปและอภิปรายผล				■	■			
4. เขียนรายงานและส่งเล่มรายงาน					■	■	■	
5. สอบโครงงานวิจัยทางคณิตศาสตร์								■

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้แบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์
2) ได้จุดสมดุลของแบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์
3) ได้เสถียรภาพของแบบจำลองโรคระบาด *SIQS* ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์
4) ได้ผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในครั้งนี้ เราจะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาสร้างแบบจำลองโรคระบาด และวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลอง เพื่อนำแบบจำลองมาใช้ในการควบคุมการแพร่ระบาดของโรค และพยากรณ์โรคระบาด ซึ่งในการศึกษาค้นคว้าเพื่อดำเนินการให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ ผู้ศึกษาได้ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1) ความรู้เกี่ยวกับโรคระบาด
2) ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน
3) การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาดโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป
4) จาโคเบียน
5) ระบบสมการเชิงเส้น และทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์
6) การหารากของ Routh- Hurwitz
7) งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้เกี่ยวกับโรคระบาด

โรคระบาด (Epidemic) หมายถึง สถานการณ์การติดเชื้อโรคหรือโรคติดเชื้อที่เกิดขึ้นในระยะเวลาเดียวกันในชุมชน ในถิ่นหรือในแหล่งหนึ่งแหล่งใดในอัตราสูงกว่าสถานการณ์ปกติที่ควรเป็น ซึ่งสามารถติดต่อจากสิ่งมีชีวิตหนึ่งไปยังอีกสิ่งมีชีวิตหนึ่งได้ โดยไม่จำกัดว่าสิ่งมีชีวิตนั้นจะเป็นมนุษย์หรือไม่ก็ตาม โรคติดเชื้อ สามารถแพร่ไปสู่สิ่งมีชีวิตอื่นได้โดยการสัมผัสโดยตรง การสูดดมหายใจเอาเชื้อโรคที่แพร่จากผู้ป่วย การรับประทานอาหารหรือน้ำดื่มที่มีเชื้อปนอยู่ หรือแม้แต่ผ่านตัวกลางที่เรียกว่าพาหะ โดยการติดเชื้อนั้นลุกลามแพร่กระจายอยู่ในชุมชน ในถิ่น หรือในแหล่งนั้นๆที่อยู่ใกล้เคียงจุดเริ่มต้นของโรค และสามารถแพร่กระจายลุกลามไปยังชุ่มชนอื่น ๆ ที่อยู่ไกล ๆ ออกไปได้หลาย ๆ ชุมชนหรือหลายๆสถานที่ (พวงทอง ไกรพิบูลย์, 2556)

2.1.1 ปัจจัยของการเกิดโรคระบาด

เมื่อเชื้อโรคเข้าสู่ร่างกาย บางคนอาจเกิดโรคและแสดงอาการอย่างรวดเร็ว ขณะที่บางคน ไม่แสดงอาการใด ๆ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ (1) คุณสมบัติของเชื้อ เช่น ความสามารถในการก่อโรคของเชื้อ ความรุนแรงของเชื้อ ระยะฟักตัวของเชื้อที่เข้าสู่ร่างกาย และปริมาณของเชื้อที่ได้รับ (2) สภาพร่างกายผู้รับเชื้อโรค โดยเฉพาะคนชรา ทารก และเด็กเล็ก ที่มีระดับภูมิต้านทานโรคของร่างกาย ไม่ดีพอ ทำให้

เจ็บป่วยได้ง่าย และมีอาการรุนแรงมากกว่ากลุ่มอายุอื่น สำหรับคนที่มีร่างกายแข็งแรง ภูมิต้านทานของร่างกายดี เมื่อได้รับเชื้ออาจไม่เกิดโรค หรือหากเกิดโรคก็อาจแสดงอาการไม่รุนแรง และ (3) สิ่งแวดล้อม ซึ่งมีผลต่อการแพร่กระจายของโรคและการเกิดโรคได้ เช่น ถ้าอากาศหนาวเย็น เชื้อไวรัสหวัดจะสามารถอยู่ในสิ่งแวดล้อมได้นานขึ้น โอกาสที่คนจะได้รับเชื้อและเป็นโรคหวัดจึงมากขึ้น ในขณะที่เชื้อแบคทีเรียบางชนิดสามารถเจริญเติบโตและเพิ่มจำนวนได้ดีในอุณหภูมิที่สูงขึ้น เช่น เชื้ออหิวาตกโรค ซึ่งมักระบาดในช่วงฤดูร้อน เป็นต้น

2.1.2 การรักษาของโรคระบาด

การรักษาของโรคระบาดประกอบด้วยการรักษาตามสาเหตุ และการรักษาประคับประคองตามอาการ (พวงทอง ไกรพิบูลย์, 2556)

1) การรักษาตามสาเหตุ คือ การรักษาตามชนิดของเชื้อโรค เช่น

- การให้ยาปฏิชีวนะ เมื่อโรคเกิดจากแบคทีเรีย ซึ่งยาปฏิชีวนะมีหลากหลายชนิด การเลือกใช้ยาจึงต้องเหมาะสมกับชนิดของแบคทีเรียนั้น ๆ ดังนั้น การใช้ยาปฏิชีวนะจึงจำเป็นต้องได้รับคำแนะนำจาก แพทย์ เภสัชกร และพยาบาลเสมอ เพราะการซื้อยากินเอง มักทำให้เกิดเชื้อดื้อยา และอาจส่งผลให้โรคไม่หายจากการใช้ยาที่ไม่เหมาะกับโรค ทั้งชนิดของยา ปริมาณยา และระยะเวลาที่ต้องได้รับยา

- การให้ยาต้านไวรัส เมื่อโรคเกิดจากไวรัสชนิดที่มียาต้านไวรัสชนิดนั้น ทั้งนี้เพราะโดยทั่วไป ร่างกายจะสร้างภูมิคุ้มกันต้านทานโรคขึ้นมากำจัดไวรัสเอง การรักษาการติดเชื้อไวรัสโดยทั่วไปเป็นการรักษาแบบประคับประคองตามอาการ (ไม่สามารถใช้ยาปฏิชีวนะได้เนื่องจากยาปฏิชีวนะฆ่าไวรัสไม่ได้ และไม่สามารถใช้ยาต้านไวรัสได้กับทุกชนิดของไวรัส) โดยทั่วไป ถึงแม้จะมียาต้านไวรัส แพทย์เลือกใช้เฉพาะกรณีที่โรครุนแรง หรือเมื่อมีการติดเชื้อของผู้ที่มีภูมิคุ้มกันต้านทานโรคต่ำ หรือที่เรียกว่า กลุ่มเสี่ยง เช่น การใช้ยาโอเซลทามิเวียร์ (Oseltamivir) ในโรคไข้หวัดใหญ่ 2009 เป็นต้น

- การให้ยาฆ่าเชื้อรา เมื่อโรคเกิดจากติดเชื้อรา ซึ่งยาฆ่าเชื้อรามีหลายชนิดเช่นกันขึ้นกับว่าเป็นการติดเชื้อราชนิดใด เช่น การใช้ยาคีโตโคนาโซล (Ketoconazole) ในโรคเชื้อราในช่องคลอด

- การให้ยาฆ่าสัตว์เซลล์เดียว ใช้เมื่อโรคเกิดจากสัตว์เซลล์เดียว ซึ่งยาจะมีหลายชนิด ขึ้นกับว่าเป็นการติดเชื้อสัตว์เซลล์เดียวชนิดใด เช่น ยา Chloroquine ในการรักษาโรคไข้จับสั่น หรือ ยา Metronidazole ในการรักษาโรคบิดมีตัว เป็นต้น

2) การรักษาประคับประคองตามอาการ คือ ให้การรักษาแบบประคับประคองตามอาการของผู้ป่วย เช่น

- การให้ยาพาราเซตามอล เพื่อลดไข้ หรือลดปวดศีรษะ ปวดเมื่อยเนื้อตัวเมื่อมีไข้
- การพักผ่อนให้เพียงพอ

- การดื่มน้ำมาก ๆ เพื่อป้องกันภาวะเสียน้ำจากมีไข้ จากอาเจียน หรือ จากท้องเสีย
- การกินอาหารอ่อน เพื่อให้กระเพาะอาหารย่อยอาหารได้ง่ายในภาวะร่างกายเจ็บป่วย
- การให้สารอาหารทางหลอดเลือดดำ เมื่อขาดน้ำมากหรือดื่มน้ำ

2.2 ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน

ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของโรค (Basic reproductive number) เขียนโดยใช้สัญลักษณ์ R_0 ซึ่งเป็นดัชนีวัดจำนวนเฉลี่ยของผู้ติดเชื้อ หรือค่าดัชนีสำหรับการแพร่ระบาดในกลุ่มประชากรเสี่ยงที่สัมพันธ์กับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อครั้งแรก ถ้า $R_0 < 1$ การระบาดของโรคลดลง หรือไม่มีการแพร่ระบาดของโรคในอาณาบริเวณที่ศึกษา แต่ถ้า $R_0 > 1$ โรคมีโอกาสกลับมาระบาดอีกครั้ง เนื่องจากจำนวนเฉลี่ยของการติดเชื้อต่อเนื่อง จากผู้ป่วยแต่ละคนมีจำนวนเพิ่มขึ้นเพียงพอที่จะทำให้บริเวณที่ศึกษาเกิดการระบาดของโรคอีกครั้ง (เจษฎา เด่นดวงบริพันธ์, 2547)

2.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาดโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป

วิธีรุ่นถัดไปถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Diekmann, Heesterbeek, and Metz (1990) เป็นวิธีทั่วไปในการหา R_0 สำหรับตัวแบบที่มีการแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็นหลายลักษณะ เช่น ตามอายุ ตามเพศ ตามถิ่นที่อยู่ เป็นต้น ขั้นตอนการหา R_0 ด้วยวิธีนี้ถูกกล่าวไว้อย่างละเอียดในงานของ Diekmann และ Heesterbeek ในปี 2000 และลักษณะสำคัญของงานนี้ได้ถูกนำมาขยายความต่อและได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างต่อเนื่องโดยสรุป ในวิธีนี้ R_0 จะถูกคำนวณจาก Spectral radius ของตัวดำเนินการรุ่นถัดไป (next generation operator) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องสร้างตัวดำเนินการรุ่นถัดไป สำหรับตัวแบบที่กำลังพิจารณาเสียก่อน ซึ่งก็จะพิจารณาจากกลุ่มของผู้ติดเชื้อและกลุ่มที่ไม่ติดเชื้อ นั่นเอง

สมมติให้ประชากรถูกแบ่งเป็น n กลุ่ม โดยกำหนดให้มี m กลุ่ม ที่เป็นกลุ่มผู้ติดเชื้อ นิยามเวกเตอร์ $\bar{x} = x_i, i = 1, ..., n$ เมื่อ x_i แทนจำนวนหรือสัดส่วนของคนที่อยู่ในกลุ่ม i

ให้ $F_i(\bar{x})$ เป็นอัตราของการเกิดการติดเชื้อใหม่ในกลุ่มที่ i ไม่รวมการส่งผ่านของคนที่ติดเชื้อจากกลุ่มหนึ่งไปยังกลุ่มหนึ่ง

ให้ $V_i(\bar{x}) = V_i^-(\bar{x}) - V_i^+(\bar{x})$

เมื่อ $V_i^+(\bar{x})$ เป็นอัตราของการส่งผ่านของคนไปยังกลุ่ม i

และ $V_i^-(\bar{x})$ เป็นอัตราของการส่งผ่านของคนออกจากกลุ่ม i

จะเห็นได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ x_i เทียบกับเวลา เป็นดังนี้

$$x_i = F_i(\bar{x}) - V_i(\bar{x}) \tag{2.1}$$

และกำหนดให้ X_s เป็นกลุ่มของทุกโรคที่อิสระต่อกัน กล่าวคือ

$$X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, ..., m\} \tag{2.2}$$

F_i และ V_i จะต้องเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมมติฐาน $(A1 - A5)$ ดังนี้

(A1) ถ้า $x_i \geq 0$ แล้ว $F_i, V_i^+, V_i^- \geq 0$ สำหรับ $i = 1, ..., n$

(A2) ถ้า $x_i = 0$ แล้ว $V_i^- = 0$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x \epsilon X_s$ แล้ว $V_i^- = 0$ สำหรับ $i = 1, ..., m$

(A2) $F_i = 0$ ถ้า $i > m$ ประชากรที่อิสระจากโรคแล้วประชากรจะยังคงเป็นอิสระจากโรค นั่นคือ ไม่มีการกลับมาติดเชื้ออีก

(A4) ถ้า $x \epsilon X_s$ แล้ว $F_i \bar{x} = 0$ และ $V_i^+ \bar{x} = 0$ สำหรับ $i = 1, ..., m$

(A5) ถ้า $F(x)$ ถูกกำหนดเป็นศูนย์ แล้วค่าเจาะจงของ $Df(x_0)$ มีค่าจริงบางส่วนที่ติดลบ

สมมติว่า F_i และ V_i สอดคล้องกับสมมติฐานที่กำหนด เราสามารถสร้างเมทริกซ์ (ตัวดำเนินการ) รุ่นถัดไปในรูปผลคูณ FV^{-1}

เมื่อ $F = \left[\dfrac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_i}\right]$ และ $V = \left[\dfrac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_i}\right]$ สำหรับ $i, j = 1, ..., m$

เมื่อ x_0 แทน จุดสมดุลการปราศจากโรค (Disease -free equilibrium)

V^{-1} หมายถึง เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ V

FV^{-1} หมายถึง อัตราที่ซึ่งคนที่ติดเชื้อใน x_j ทำให้เกิดผู้ติดเชื้อรายใหม่ใน x_i คูณด้วยระยะเวลาเฉลี่ยของการอยู่ในกลุ่ม j ดังนั้น

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \tag{2.3}$$

เมื่อ $\rho(FV^{-1})$ ถูกกำหนดให้เป็นรัศมีสเปกตรัม (spectral radius) หรือ พจน์เด่นชัดของค่าลักษณะเฉพาะ (dominant eigenvalue) ของเมทริกซ์ FV^{-1}

บทนิยาม 2.1 (Gradshteyn & Ryzhik, 2000) ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วเซต $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ จะเรียกว่า สเปกตรัมของ A (Spectrum of A) และเรียก $\rho(A) = max\{|\lambda_i|\}$ ว่า รัศมีสเปกตรัมของ A (Spectral radius of A)

หมายเหตุ : การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาด ส่วนใหญ่จะใช้วิธีรุ่นถัดไป เพราะมีความสะดวกและง่ายต่อการคำนวณ ซึ่งในบทความนี้จะนำเสนอการหาค่าระดับการติดเชื้อด้วยวิธีรุ่นถัดไป

2.4 จาโคเบียน (Jacobian)

บทนิยาม 2.2 (ดำรงค์ ทิพย์โยธา, 2551) ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังชันก์ของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ มีค่าทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ จาโคเบียนดีเทอร์มิแนนท์ ของ f_1, $f_2, \ldots, f_n$ หรือเรียกโดยย่อว่า **จาโคเบียน** ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เทียบกับตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ โดยที่ ดีเทอร์มิแนนท์ คือ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจาโคเบียน ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เทียบกับตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนด้วย $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

เมื่อ
$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

2.5 ระบบสมการเชิงเส้น และทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์

อาริสา ฉัตรกิจวรุณ (2542) ได้พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

โดยที่ a_{ij}, b_i เป็นสเกลาร์ ; $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$

ระบบสมการ m สมการ n ตัวแปร เขียนในรูปเมทริกซ์ $A\mathbf{x} = B$ ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A นี้จะเรียกว่า **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** (coefficient matrix) ของระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n และ $\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน $\mathbb{R}^n$ เราจะเรียก $\mathbf{x}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvector) ของ A ก็ต่อเมื่อ

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

สำหรับบางค่าสเกลาร์ λ

สเกลาร์ λ เรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะของ A (Eigenvalue) นอกจากนี้ $\mathbf{x}$ ยังเรียกได้ว่า เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ λ (Eigenvector corresponding to λ)

บทนิยาม 2.4 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ค่า $\det(A - \lambda I_n)$ เรียกว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) และสมการ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)

2.6 การหารากของ Routh- Hurwitz

Gantmacher (1959, p.213) (อ้างถึงใน ธีรวัฒน์ จึงสรรค์ศุภชัย, พนมกร ตาลพรรณ์และชัยธนัช ประภัสโรทัย, 2554, น.11) แสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ทำให้รากทั้งหมดของพหุนามมีส่วนจริงเป็นลบดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้สมการพหุนามกำลัง n คือ

$$P(A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a^n$$

ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์คือ ค่าคงที่จริง $i = 1, \ldots, n$ กำหนด n เมทริกซ์โดยค่าสัมประสิทธิ์ a_i ของลักษณะเฉพาะพหุนาม

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

และ

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a_j = 0$ ถ้า $j > n$ รากทั้งหมดของพหุนาม $\rho(\lambda)$ เป็นจำนวนจริงลบหรือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงลบ ก็ต่อเมื่อตัวกำหนดของเมทริกซ์เฮอร์วิธ (Hurwitz) ทั้งหมดเป็นบวก

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ $n = 2$ ซึ่งเป็นเฮอร์วิธ ที่สามารถหาได้ง่าย คือ $\det H_1 = a_1 > 0$ และ

$$\det H_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

หรือ $a_1 > 0$ และ $a_2 > 0$ สำหรับพหุนามดีกรี $n = 2, 3, 4$ และ 5 สามารถหาได้จากเร้าท์เฮอร์วิธ (Routh-Hurwitz) เมื่อ $n = 2 : a_1 > 0$ และ $a_2 > 0$

$n = 3 : a_1 > 0,\ a_3 > 0$ และ $a_1 a_2 > a_3$

$n = 4 : a_1 > 0,\ a_3 > 0, a_4 > 0$ และ $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

$n = 5 : a_i > 0;\ i = 1, 2, 3, 4, 5, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ และ

$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการป้องกัน และควบคุมการแพร่ระบาดของโรค ทั้งนี้การสร้างแบบจำลองโรคระบาดต้องเริ่มต้นจากการทำความเข้าใจโรคระบาด และปัจจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเกิดโรค มาตรการหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการควบคุมโรค คือ

การรักษาและการคัดแยกผู้ติดเชื้อ จึงได้มีนักวิจัยหลายคนที่ได้ทำการศึกษา และวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีการรักษาและการคัดแยกผู้ติดเชื้อ เช่น

Hethcote, Zhien, and Shengbing (2002) ได้ศึกษาผลกระทบของการคัดแยกในแบบจำลอง *SIQS* และ *SIQR* จำนวน 6 แบบจำนวน โดยมีอัตราอุบัติการณ์ 3 แบบ พบว่า แบบจำลองส่วนใหญ่ที่จุดสมดุลโรคคงอยู่จะมีเสถียรภาพ และมี bifurcation หลายชนิดเกิดขึ้นในบางแบบจำลอง

Erdem, Safan, and Castillo-Chavez (2017) ได้ศึกษาแบบจำลองโรคหวัด โดยศึกษาผลกระทบของการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ในแบบจำลอง *SIQR* จากการวิเคราะห์เสถียรภาพและผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองพบว่า ประสิทธิภาพของการคัดแยกและพารามิเตอร์ต่าง ๆ ส่งผลให้เกิด Hopf bifurcation

Joshi, Shama, and Prajapati (2017) ได้ศึกษาแบบจำลอง *SIQS* ที่ใช้อัตราอุบัติการณ์ที่อิ่มตัวและการคัดแยกโรค ซึ่งวิเคราะห์ผลกระทบและผลลัพธ์ของโรค พบว่า ถ้า $R_q < 1$ แสดงว่าเป็นจุดสมดุลอิสระจากโรคและมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ เช่น โรคตาย และถ้า $R_q > 1$ แสดงว่าเป็นจุดสมดุลโรคคงอยู่และมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ เช่น โรคประจำถิ่น วิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลพิสูจน์โดยใช้หลักเกณฑ์ Routh-Hurwitz ฟังก์ชัน Lyapunov และเกณฑ์ของ Dulac

Li, Li, and Ghosh (2009) ได้ศึกษาแบบจำลองโรคระบาด *SIS* ที่มีทรัพยากรอย่างจำกัดสำหรับการรักษา มีการสันนิษฐานว่าอัตราการรักษาเป็นสัดส่วนกับจำนวนผู้ติดเชื้อ ซึ่งอัตราการรักษาน้อยกว่าทรัพยากรที่มีและเป็นค่าคงที่เมื่อจำนวนผู้ติดเชื้อมากกว่าอัตราการรักษา พบว่า Backward bifurction จะเกิดขึ้นเมื่ออัตราการรักษาไม่เพียงพอ นอกจากนี้ยังพบว่าภาวะสมดุลโรคคงอยู่แบบ bistable ถ้าอัตราการรักษาอยู่ในระดับต่ำ

Wang and Jiang (2014) ได้ศึกษาแบบจำลอง *SIS* อัตราอุบัติการณ์แบบอิ่มตัวและมีการรักษาโดยใช้อัตราการรักษาที่แตกต่างกัน มีการใช้ทฤษฎีบทเสถียรภาพและทฤษฎีเชิงคุณภาพเพื่อวิเคราะห์ชนิดของจุดสมดุลและบอกเงื่อนไขในการไม่มี limitcycle

บทที่ 3

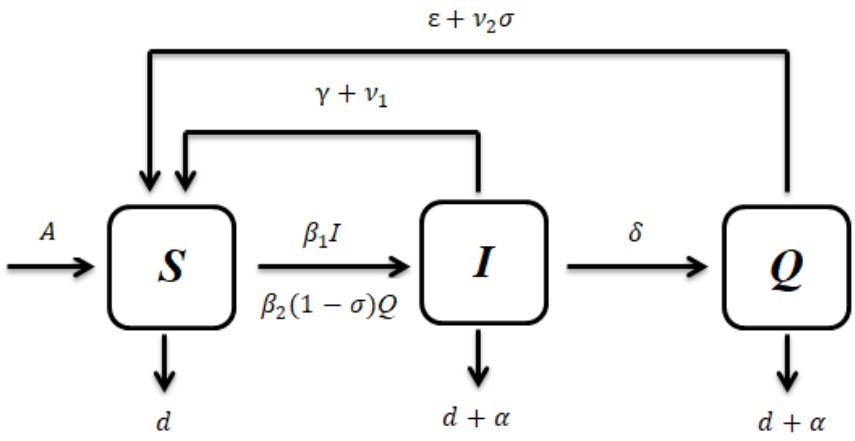
แบบจำลองโรคระบาดและการวิเคราะห์

3.1 การพัฒนาแบบจำลองโรคระบาด

งานวิจัยครั้งนี้แบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่มดังนี้ $S(t)$ แทนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible individuals) ณ เวลา t, $I(t)$ แทนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (Infected individuals) ณ เวลา t และ $Q(t)$ แทนประชากรติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Quarantine individuals) ณ เวลา t การเปลี่ยนแปลงของแต่ละกลุ่มประชากร แสดงในรูปที่ 3.1 และแสดงพารามิเตอร์และความหมายพารามิเตอร์ในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์และความหมายของพารามิเตอร์

พารามิเตอร์	ความหมาย
A	อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน
β_1	อัตราการติดเชื้อของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ
β_2	อัตราการติดเชื้อของกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก
γ	อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการติดเชื้อ
α	อัตราการเสียชีวิตด้วยโรค
δ	อัตราการคัดแยกผู้ติดเชื้อ
ε	อัตราที่ถูกคัดแยกที่หายจากการติดเชื้อ
d	อัตราการเสียชีวิตโดยธรรมชาติ
ν_1	อัตราการรักษาของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ
ν_2	อัตราการรักษาของกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก
σ	ประสิทธิภาพการคัดแยก



รูปที่ 3.1 แผนภาพแสดงแนวการคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากรูปที่ 3.1 จะแสดงกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจาก อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน A และทุกกลุ่มประชากรมีจำนวนลดลงเนื่องจากการเสียชีวิตโดยธรรมชาติด้วยอัตรา d สำหรับประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากประชากรกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อได้รับเชื้อแล้วย้ายมาอยู่ในกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ ด้วยอัตรา $\beta_1 I$ และเมื่อประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อปฏิสัมพันธ์กับประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์จะย้ายมาอยู่ในกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อด้วยอัตรา $\beta_2(1-\sigma)Q$ ประชากรที่ติดเชื้อและประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยกมีจำนวนลดลงเนื่องจากการเสียชีวิตด้วยโรคด้วยอัตรา α และประชากรมีจำนวนลดลงเนื่องจากประชากรที่ติดเชื้อและประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยกได้หายจากการติดเชื้อเองด้วยอัตรา γ และ ε ตามลำดับ และหายจากการได้รับการรักษาด้วยอัตรา ν_1 และ ν_2 ตามลำดับ และสำหรับประชากรกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการคัดแยกผู้ติดเชื้อด้วยอัตรา δ

จากความสัมพันธ์ข้างต้น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ $SIQS$ ของโรคระบาดที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= A - \beta_1 SI - \beta_2 S(1-\sigma)Q - dS + (\gamma + \nu_1)I + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q \\
\frac{dI}{dt} &= \beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)I \qquad (3.1) \\
\frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)Q
\end{aligned}$$

3.2 วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง

3.2.1 จุดสมดุลของแบบจำลอง

จุดสมดุลของระบบสมการ (3.1) หาได้โดยกำหนดให้ $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 0$ จะได้ว่า

$$A - \beta_1 SI - \beta_2 S(1-\sigma)Q - dS + (\gamma + \nu_1)I + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q = 0 \tag{3.2}$$

$$\beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)I = 0 \tag{3.3}$$

$$\delta I - (\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)Q = 0 \tag{3.4}$$

จากสมการ (3.2) จะได้

$$\begin{aligned} S(\beta_1 I + \beta_2(1-\sigma)Q + d) &= A + (\gamma + \nu_1)I + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q \\ S &= \frac{A + (\gamma + \nu_1)I + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q}{\beta_1 I + \beta_2(1-\sigma)Q + d} \end{aligned} \tag{3.5}$$

จากสมการ (3.4) จะได้

$$Q = \frac{\delta I}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} \tag{3.6}$$

แทนค่าสมการ (3.6) ในสมการ (3.3) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_1 SI + \frac{\beta_2 S(1-\sigma)\delta I}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)I &= 0 \\ I\left(\beta_1 S + \frac{\beta_2 S(1-\sigma)\delta}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

จากสมการ (3.7) พบว่าในการหาจุดสมดุลต้องพิจารณา 2 กรณี คือ

$$I = 0 \quad \text{หรือ} \quad \beta_1 S + \frac{\beta_2 S(1-\sigma)\delta}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1) = 0$$

กรณีที่ 1 $I = 0$ จากสมการ (3.6) และสมการ (3.5) จะได้

$$\begin{aligned} Q &= 0 \\ S &= \frac{A + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q}{\beta_2(1-\sigma)Q + d} \end{aligned}$$

ตามลำดับ แทนค่า $Q = 0$ ในสมการ $S = \frac{A + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q}{\beta_2(1-\sigma)Q + d}$ จะได้

$$S = \frac{A}{d}$$

ดังนั้นจุดสมดุล คือ

$$E_0 = (S^0, I^0, Q^0) = \left(\frac{A}{d}, 0, 0\right)$$

โดยเรียกจุดสมดุล E_0 นี้ว่า **จุดสมดุลที่อิสระจากโรค** (Disease-free equilibrium)

ลำดับต่อไปเป็นการหาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานโดยวิธีการแนวคิดของเมทริกซ์รุ่นถัดไป (Next generation matrix) ที่แสดงใน Driessche and Watmough (2002)

จากสมการ (3.1) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \beta_1 SI - \beta_2 S(1-\sigma)Q - dS + (\gamma + \nu_1)I + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q \\ \beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)I \\ \delta I - (\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)Q \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} A - \beta_1 SI - \beta_2 S(1-\sigma)Q - dS + (\gamma + \nu_1)I + (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q \\ \beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)I \\ \delta I - (\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)Q \end{bmatrix} \\ &= F_i - V_i \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S \\ I \\ Q \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$V_i = \begin{bmatrix} -A + \beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q + dS - (\gamma + \nu_1)I - (\varepsilon + \nu_2\sigma)Q \\ (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)I \\ -\delta I + (\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)Q \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.9) และ (3.10) คือ

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 I + \beta_2(1-\sigma)Q & \beta_1 S & \beta_2 S(1-\sigma)Q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$V = \begin{bmatrix} \beta_1 I + \beta_2(1-\sigma)Q + d & \beta_1 S - \gamma - \nu_1 & \beta_2(1-\sigma) - \varepsilon - \nu_2\gamma \\ 0 & \gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1 & 0 \\ 0 & -\delta & \varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ตามลำดับ

เนื่องจากการหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองสัมพันธ์กับการแพร่เชื้อในประชากรดัง

นั้นเพื่อให้ง่ายต่อการหาค่าระดับการติดเชื้อเราจึงพิจารณากลุ่มของประชากรที่ติดเชื้อ (I) และกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Q) เท่านั้น นั่นคือ

$$F_i = \begin{bmatrix} \beta_1 SI + \beta_2 S(1-\sigma)Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V_i = \begin{bmatrix} (\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1)I \\ -\delta I + (\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)Q \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.13) คือ

$$F = \begin{bmatrix} \beta S & \beta_2 S(1-\sigma) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V = \begin{bmatrix} \gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1 & 0 \\ -\delta & \varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

แทนค่าจุดสมดุลที่อิสระจากโรค $E_0 = (S^0, I^0, Q^0) = \left(\frac{A}{d}, 0, 0\right)$ ลงในสมการ (3.14) จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} \frac{A\beta_1}{d} & \frac{A\beta_2(1-\sigma)}{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$\text{และ} \quad V = \begin{bmatrix} \gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1 & 0 \\ -\delta & \varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

จากสมการ (3.16) จะได้เมทริกซ์ผกผันของ V ดังนี้

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1} & 0 \\ \frac{\delta}{(\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1)(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)} & \frac{1}{\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

นำเมทริกซ์ F คูณ V^{-1} จะได้

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A\beta_1(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)+A\beta_2(1-\sigma)\delta}{d(\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1)(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)} & \frac{A\beta_2(1-\sigma)}{d(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.18) โดยกำหนดให้ λ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$ พิจารณา

$$\det \begin{bmatrix} \frac{A\beta_1(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)+A\beta_2(1-\sigma)\delta}{d(\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1)(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)} - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

จะได้ว่า $\lambda\left(\lambda - \frac{A\beta_1(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)+A\beta_2(1-\sigma)\delta}{d(\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1)(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)}\right) = 0$

ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.18) คือ

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{A\beta_1(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)+A\beta_2(1-\sigma)\delta}{d(\gamma+\delta+d+\alpha+\nu_1)(\varepsilon+d+\alpha+\nu_2\sigma)}$$

เนื่องจาก $\rho(FV^{-1}) = \max\limits_{1\le i\le 2}\{|\lambda_i|\}$

$$= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

$$= \frac{A\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + A\beta_2(1-\sigma)\delta}{d(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)}$$

นั่นคือ $\rho(FV^{-1}) = \dfrac{A\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + A\beta_2(1-\sigma)\delta}{d(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)}$

ดังนั้น $\quad R_0 = \dfrac{A\left(\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + \beta_2(1-\sigma)\delta\right)}{d(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)}$

เรียก R_0 ว่าค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน

กรณีที่ 2 $\beta_1 S + \dfrac{\beta_2 S(1-\sigma)\delta}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} - (\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1) = 0$ จะได้ว่า

$$S = \frac{(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)}{\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + \beta_2(1-\sigma)\delta} \tag{3.19}$$

นำสมการ (3.6) แทนในสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$A - \beta_1 SI - \frac{\beta_2 S(1-\sigma)\delta I}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} - dS + (\gamma + \nu_1)I\frac{(\varepsilon + \nu_2\sigma)\delta I}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma} = 0$$

$$I = \frac{d(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)^2(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(R_0 - 1)}{(d+\alpha)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma + \delta)[\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + \beta_2(1-\sigma)\delta]} \tag{3.20}$$

ดังนั้นจุดสมดุล คือ $E_* = (S^*, I^*, Q^*)$ เมื่อ

$$S^* = \frac{(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)}{\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + \beta_2(1-\sigma)\delta}$$

$$I^* = \frac{d(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma)^2(\gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1)(R_0 - 1)}{(d+\alpha)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma + \delta)[\beta_1(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma) + \beta_2(1-\sigma)\delta]}$$

$$Q^* = \frac{\delta I^*}{\varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma}$$

โดยเรียกจุดสมดุล E_* ว่า **จุดสมดุลที่โรคคงอยู่** (Endemic equilibrium)

3.2.2 วิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุล

กำหนดให้ $e_1 = \gamma + \delta + d + \alpha + \nu_1$, $e_2 = \varepsilon + d + \alpha + \nu_2\sigma$ และ $e_3 = \beta_1 I^* + \beta_2(1-\sigma)Q^*$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลอง (3.1) คือ

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\beta_1 I - \beta_2(1-\sigma)Q - d & -\beta_1 S + (\gamma + \nu_1) & -\beta_2 S(1-\sigma) + (\varepsilon + \nu_2\sigma) \\ \beta_1 I + \beta_2(1-\sigma)Q & \beta_1 S - e_1 & \beta_2 S(1-\sigma) \\ 0 & \delta & -e_2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $R_0 < 1$ แล้วระบบสมการ (3.1) จะมีจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E_0) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (locally asymptotically stable)

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลอง (3.1) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค คือ

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -d & -\dfrac{\beta_1 A}{d} + (\gamma + \nu_1) & -\dfrac{\beta_2 A(1-\sigma)}{d} + (\varepsilon + \nu_2\sigma) \\ 0 & \dfrac{\beta_1 A}{d} - e_1 & \dfrac{\beta_2 A(1-\sigma)}{d} \\ 0 & \delta & -e_2 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

สมการลักษณะเฉพาะของจาโคเบียน (3.22) คือ

$$\det \begin{bmatrix} -d-\lambda & -\dfrac{\beta_1 A}{d} + (\gamma + \nu_1) & -\dfrac{\beta_2 A(1-\sigma)}{d} + (\varepsilon + \nu_2\sigma) \\ 0 & \dfrac{\beta_1 A}{d} - e_1 - \lambda & \dfrac{\beta_2 A(1-\sigma)}{d} \\ 0 & \delta & -e_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

จะได้ว่า

$$-(d-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda\left(-\frac{\beta_1 A}{d} + e_1 + e_2\right) - \left(\frac{\beta_1 A e_2 + \delta\beta_2 A(1-\sigma)}{d}\right) + e_1 e_2\right] = 0$$

หรือ

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{3.23}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\delta\beta_2 A(1-\sigma)}{de_2} + e_2 + e_1(1-R_0) \\ a_2 &= e_1 e_2 (1-R_0) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $a_1 > 0$ และ $a_2 > 0$ เมื่อ $R_0 < 1$ จากหลักการของ Routh Hurwitz จะได้ว่า สมการ (3.23) จะมีรากที่เป็นจำนวนลบ ดังนั้น จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0 < 1$

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $R_0 > 1$ แล้วระบบสมการ (3.1) จะมีจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E_*) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (locally asymptotically stable)

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.1) ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ คือ

$$J(E_*) = \begin{bmatrix} -e_3 - d & -\beta_1 S^* + (\gamma + \nu_1) & -\beta_2 S^*(1-\sigma) + (\varepsilon + \nu_2\sigma) \\ e_3 & \beta_1 S^* - e_1 & \beta_2 S^*(1-\sigma) \\ 0 & \delta & -e_2 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

สมการลักษณะเฉพาะของจาโคเบียน (3.24) คือ

$$\det\begin{bmatrix} -e_3-d-\lambda & -\beta_1 S^*+(\gamma+\nu_1) & -\beta_2 S^*(1-\sigma)+(\varepsilon+\nu_2\sigma) \\ e_3 & \beta_1 S^*-e_1-\lambda & \beta_2 S^*(1-\sigma) \\ 0 & \delta & -e_2-\lambda \end{bmatrix}=0$$

หรือ

$$f(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0 \tag{3.25}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta_1 I^*+\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}+\beta_2(1-\sigma)Q^*+e_2+d \\ a_2 &= e_3(\delta+d+\alpha)+e_2(e_3+d)+d\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right) \\ a_3 &= e_3(d+\alpha)(e_2+\delta) \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a_1a_2-a_3 &= \beta_1 I^* e_3(\delta+d+\alpha)+\beta_1 I^* d\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right)+\beta_1 I^* e_2(e_3+d) \\ &+\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right)e_3(\delta+d+\alpha)+\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right)e_2(e_3+d) \\ &+d\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right)^2+e_3(\beta_2(1-\sigma)Q^*)(\delta+d+\alpha) \\ &+e_2(\beta_2(1-\sigma)Q^*)(e_3+d)+(\beta_2(1-\sigma)Q^*)d\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right) \\ &+e_2(\varepsilon+2d+\alpha+\nu_2\sigma)(e_3+d)+e_2\left(\frac{\beta_2(1-\sigma)\delta S^*}{e_2}\right) \\ &+e_3\left(\delta(\nu_2\sigma+2d+\varepsilon)+d^2\right)>0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $a_1>0, a_2>0$ และ $a_3>0$ เมื่อ $R_0>1$ จากหลักการของ Routh Hurwitz จะได้ว่าสมการ (3.25) จะมีรากที่เป็นจำนวนลบ ดังนั้น จุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0>1$

บทที่ 4

ผลเชิงตัวเลข

ในบทนี้จะแสดงผลเชิงตัวเลขเพื่อตรวจสอบเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 4.1 และมีการเปลี่ยนแปลงอัตราการติดเชื้อของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ (β_1) และพารามิเตอร์ตัวอื่นไม่เปลี่ยนแปลงเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข $R_0 < 1$ และ $R_0 > 1$

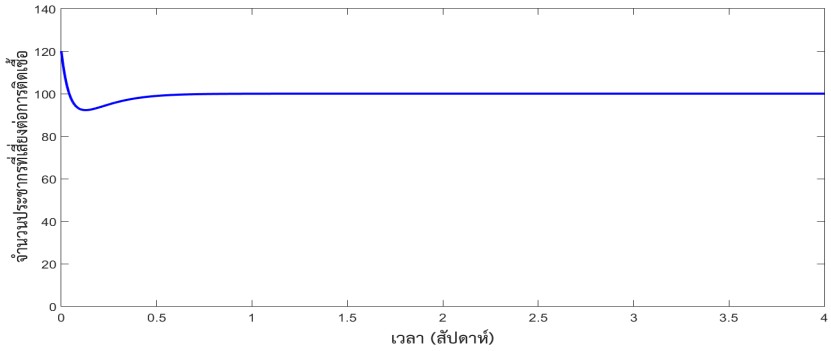
ตารางที่ 4.1 พารามิเตอร์ของแบบจำลอง *SIQS*

พารามิเตอร์	ความหมาย	ค่า
A	อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน	10
β_1	อัตราการติดเชื้อของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ	0.005 , 0.01
β_2	อัตราการติดเชื้อของกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก	0.001
γ	อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการติดเชื้อ	0.2
α	อัตราการเสียชีวิตด้วยโรค	0.1
δ	อัตราการคัดแยกผู้ติดเชื้อ	0.2
ε	อัตราที่ถูกคัดแยกที่หายจากการติดเชื้อ	0.1
d	อัตราการตายโดยธรรมชาติ	0.1
ν_1	อัตราการรักษาของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ	0.02
ν_2	อัตราการรักษาของกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก	0.01
σ	ประสิทธิภาพการคัดแยก	0.2

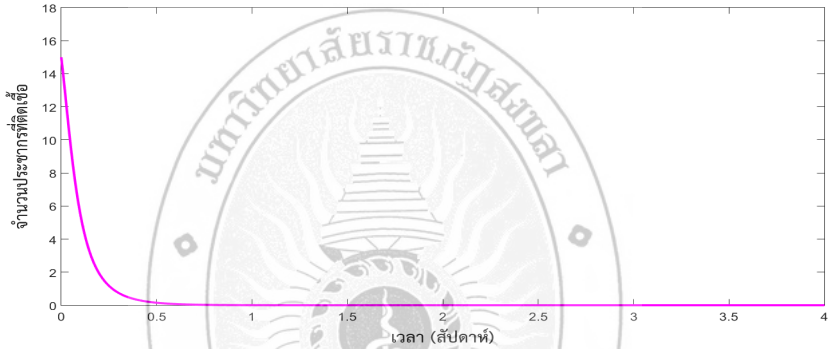
4.1 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง

กำหนดให้ $\beta_1 = 0.005$ จะได้ค่า $R_0 = 0.8919 < 1$ จะเห็นว่ากลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ (I) และกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก (Q) ลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่อิสระจากโรคคือ $E_0 = (S^0, I^0, Q^0) = (100, 0, 0)$ นั่นคือการระบาดของโรคลดลงหรือไม่มีการแพร่ระบาดของโรคในอาณาบริเวณที่ศึกษา โดยแสดงผลดังรูปที่ 4.1

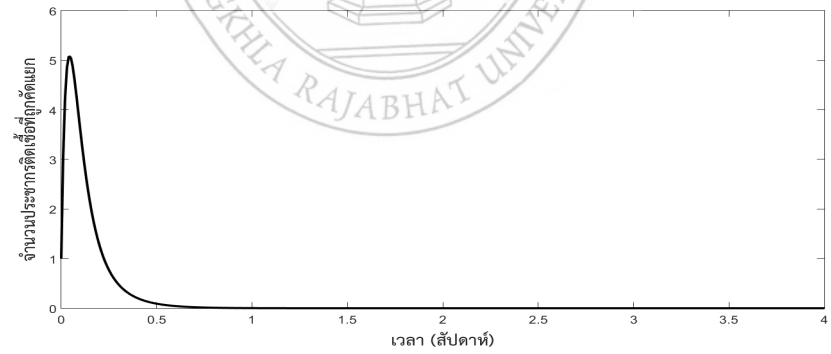
(a) จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



(b) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ



(c) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกคัดแยก

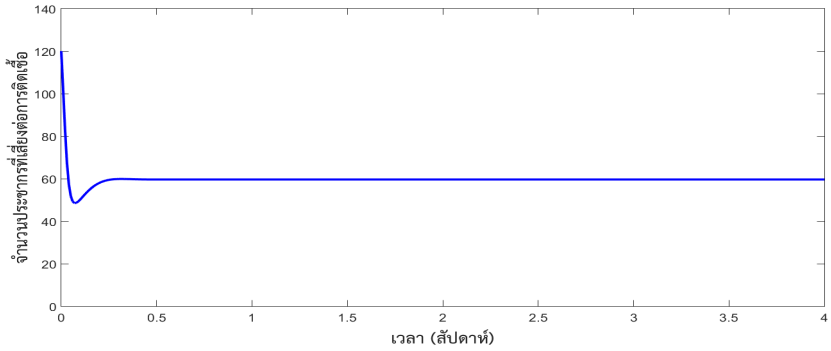


รูปที่ 4.1 ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta_1 = 0.005$ จะได้ $R_0 < 1$

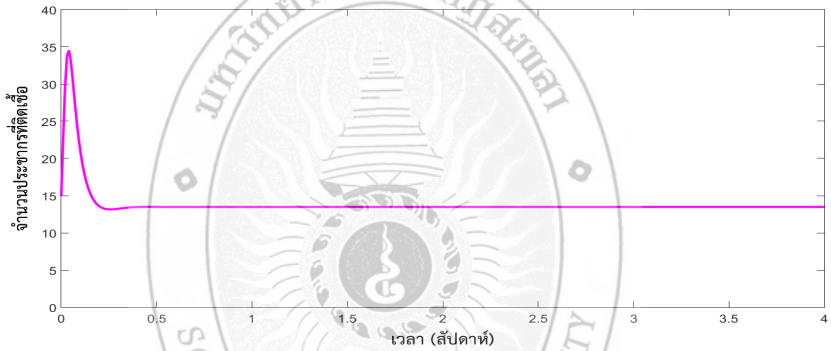
4.2 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง

กำหนดให้ $\beta_1 = 0.01$ จะได้ค่า $R_0 = 1.6983 > 1$ จะเห็นว่า กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ (I) และกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก (Q) ลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ $E_* = (S^*, I^*, Q^*) = (62.00, 13.20, 7.45)$ นั่นคือมีการระบาดของโรค โดยแสดงผลดังรูปที่ 4.2

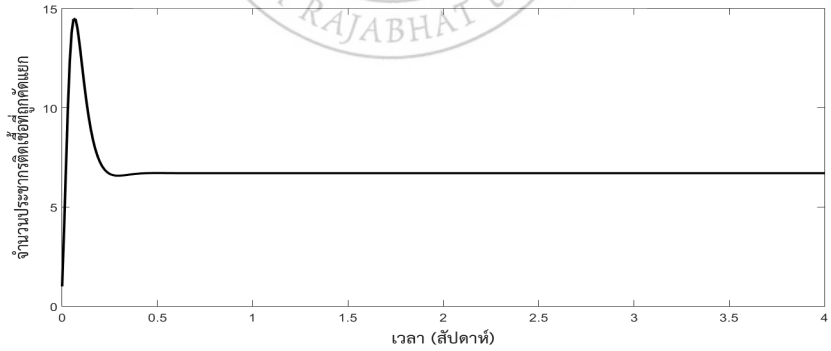
(a) จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



(b) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ



(c) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกคัดแยก



รูปที่ 4.2 ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta_1 = 0.01$ จะได้ $R_0 > 1$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา SONGKHLA RAJABHAT UNIVERSITY

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยครั้งนี้ได้มีการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ $SIQS$ ที่มีการรักษาและการคัดแยกที่ไม่สมบูรณ์ โดยแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดได้ (I) และกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกคัดแยก (Q) โดยมีพารามิเตอร์ต่าง ๆ เป็นตัวกำหนดการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มประชากรแต่ละกลุ่ม

ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองมีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลของแต่ละจุดพบว่า จุดสมดุลทั้งสองจุดจะมีเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน (R_0) กล่าวคือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับเมื่อ $R_0 < 1$ และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับเมื่อ $R_0 > 1$

ผลเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า แบบจำลองโรคระบาด $SIQS$ จะลู่เข้าจุดสมดุลที่อิสระจากโรคเมื่อค่า $R_0 < 1$ และจะลู่เข้าจุดสมดุลที่โรคคงอยู่เมื่อ $R_0 > 1$ ดังรูป 4.1 และ 4.2 ตามลำดับ และอีกทั้งยังได้วิเคราะห์ผลกระทบของประสิทธิภาพการคัดแยก (σ) ต่อการแพร่ระบาดของโรค โดยการหาอนุพันธ์ย่อยของค่าระดับการติดเชื้อขั้นพื้นฐาน R_0 เทียบกับประสิทธิภาพการคัดแยก พบว่า

$$\frac{\partial R_0}{\partial \sigma} = \frac{-(A\beta_2\delta)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2)}{d(\gamma + \delta + d + \nu_1)(\varepsilon + d + \alpha + \nu_2)^2} < 0$$

ดังนั้น การเพิ่มประสิทธิภาพการคัดแยกจะลดค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานและลดการแพร่ระบาดของโรค

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการทำวิจัยครั้งต่อไป มีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ผู้ที่สนใจสามารถหาประสิทธิภาพการคัดแยกที่เหมาะสมในการควบคุมโรคได้
2. สามารถนำแบบจำลองที่ได้ไปประยุกต์ใช้เพื่อพยากรณ์โรคและนำผลจากการพยากรณ์โรคมาวางแผนในการจัดสรรทรัพยากรในการป้องกันควบคุมโรค

เอกสารอ้างอิง

เจษฎา เด่นดวงบริพันธ์. (2547). บทเรียนจากซาร์. *วารสารวิจัยวิทยาศาสตร์ (Section T)*, *1*(3), 49-60.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2551). *บทที่ 3 ฟังก์ชันของหลายตัวแปร*. Retrieved December 7, 2018, from http:// pioneer.netserv.chula.ac.th/~ tdumrong/ 2301217/ sheet_lecture_2551_2nd/ v11_Cal_III_ch3_page_001_104_2551_2nd.pdf

พวงทอง ไกรพิบูลย์. (2556). โรคติดเชื้อ. *แหล่งรวมข้อมูลสุขภาพโรงพยาบาลและแพทย์*, *1*(1).

อาริสา ฉัตรกิจวรุณ. (2542). *พีชคณิตเชิงเส้น*. สงขลา: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาสงขลานครินทร์.

Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Metz, J. A. J. (1990). On the definition and the computation of the basic reproduction ratio 0R in models for infectious diseases in heterogeneous populations.J. *Math. Biol.*, 365-382.

Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction number and sub-threshold endemic epidemic equilibriam for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, *180*, 29-48.

Erdem, M., Safan, M., & Castillo-Chavez, C. (2017). Mathematical analysis of an *SIQR* influenza model with imperfact quarantine. *Society for Mathematical Biology*, *79*, 1612-1636.

Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2000). *Tables of integrals, series, and products*. San diego: CA: Academic press.

Hethcote, H., Zhien, M., & Shengbing, L. (2002). Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, *7*, 141-160.

Joshi, H., Shama, R. K., & Prajapati, G. L. (2017). Stability analysis of an *SIQS* model with saturated incidence rate. *International Journal of Advance Research in Science and Engineering*, *6*(1), 624-631.

Li, X. Z., Li, W. S., & Ghosh, M. (2009). Stability and bifucation of an *SIS* epidemic model with treatment. *Chaos, Solitons and Fractals*, *42*, 19-22.

Wang, P., & Jiang, J. (2014). การรักษา. *Mathematics and Computer Science*, *5*, 5-9.