รายงานวิจัย

สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

Fibonacci-like sequence and its properties

ศรสวรรค์ แหน่งสกุล

อัสมะห์ ปาแว

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

2561

ใบรับรองงานวิจัย

มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์

ชื่อเรื่องงานวิจัย สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

Fibonacci-like sequence and its properties

ชื่อผู้ทำงานวิจัย ศรสวรรค์ แหน่งสกุล และ อัสมะห์ ปาแว

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัย

....................................อาจารย์ที่ปรึกษา ....ประธานกรรมการสอบ

(อาจารย์ธีรพล บัวทอง) (อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

....................................กรรมการสอบ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชิงชัย วัฒนธรรมเมธี)

....................................กรรมการสอบ

(อาจารย์ ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี)

....................................ประธานหลักสูตร ....

(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช) (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุมัติ เดชนะ)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เมื่อวันที่....................................

ชื่อเรื่อง	สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี
ชื่อผู้ทำงานวิจัย	ศรสวรรค์ แหน่งสกุล รหัสนักศึกษา 574254034
	อัสมะห์ ปาแว รหัสนักศึกษา 574254043
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ธีรพล บัวทอง
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต	สาขาคณิตศาสตร์
สถาบัน	มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
ปีการศึกษา	2561

บทคัดย่อ

โครงงานเล่มนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาหาสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี และหาการเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชีซึ่งนิยามอยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, n \geqslant 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเดิม คือ $S_0 = 2, S_1 = 2$ และกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นใหม่ คือ $S_0 = 2, S_1 = 4s + 3$ ทำให้ได้ลำดับคล้ายฟีโบนักชีใหม่

คำสำคัญ: ลำดับฟีโบนักชี, ลำดับลูคัส

คำนำ

โครงงานทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาวิชา (4574902) โครงงานทางคณิตศาสตร์ จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาทฤษฎีบทและนิยามที่เกี่ยวข้องกับสมบัติคล้ายฟีโบนักชี ซึ่งในโครงงานจะมีสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $S_0 = 2$ และ $S_1 = 4s + 3$ ทั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผู้อ่านหรือผู้ที่สนใจได้รับความรู้เพิ่มเติม

ผู้จัดทำโครงงานหวังเป็นอย่างยิ่งว่า โครงงานเล่มนี้จะให้ความรู้ความเข้าใจ และเกิดประโยชน์ต่อผู้สนใจเป็นอย่างยิ่ง

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณ อาจารย์ธีรพล บัวทอง ผู้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และช่วยเหลือในการทำโครงงานครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

[illegible]

ธันวาคม 2561

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำโครงงานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี ในครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้จัดทำขอขอบคุณ

อาจารย์ธีรพล [illegible] อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ซึ่งให้คำปรึกษา คำชี้แนะในการค้นคว้า และให้คำแนะนำขั้นตอนการทำโครงงานครั้งนี้ จนกระทั่งประสบความสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบโครงงานที่ให้คำแนะนำ คำชี้แนะในการแก้ไขข้อผิดพลาด และอาจารย์โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติทุกท่านที่ให้ความรู้คำปรึกษาในการทำโครงงานทางคณิตศาสตร์ครั้งนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ศรสวรรค์ แหน่งสกุล และ อัสมะห์ ปาแว

ธันวาคม 2561

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ก
คำนำ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตการศึกษา	1
1.4 วิธีการดำเนินการศึกษา	2
1.5 แผนดำเนินการศึกษา	2
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	3
2.1 ทฤษฎีบทและความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์	3
บทที่ 3 สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี	5
3.1 บทนำ	5
3.2 สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี	12
3.3 การเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี	21
บทที่ 4 สรุปผลการวิจัย	28
เอกสารอ้างอิง	29

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย

จำนวนฟีโบนักชี F_n และจำนวนลูคัส L_n เป็นจำนวนทั่วไปที่รู้จักกันดีทางคณิตศาสตร์และเนื้อหามีความน่าสนใจ สามารถเชื่อมโยงกับเรื่องอื่น ๆ ในคณิตศาสตร์ได้ เช่น ความสัมพันธ์เวียนเกิด ฟังก์ชันก่อกำเนิด ซึ่งลำดับฟีโบนักชีนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$, $n \geqslant 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ และลำดับลูคัสนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geqslant 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ซึ่งมีนักคณิตศาสตร์หลายคนได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส แล้วนำเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส มาประยุกต์เป็นลำดับคล้ายฟีโบนักชีที่มีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นใหม่ Singh, Sikhwal, and Bhatnagar (2010)

ในการทำโครงงานทางคณิตศาสตร์เล่มนี้ได้ทำการศึกษาลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ $S_n = S_{n-1}+S_{n-2}$, $n \geqslant 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเดิม คือ $S_0 = 2$, $S_1 = 2$ และเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นใหม่โดยการนำ $4s + 2$ คูณเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของลำดับฟีโบนักชีบวกกับลำดับลูคัส คือ $S_0 = 2$, $S_1 = 4s + 3$ แล้วพิจารณาสูตรไบเนตในการหาสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชีและการเชื่อมโยงสูตรของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

1.2 วัตถุประสงค์

1) เพื่อศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

2) เพื่อศึกษาเกี่ยวกับการเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1) ศึกษาสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

2) ศึกษาการเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

1.4 วิธีการดำเนินการศึกษา

1) ศึกษาค้นคว้าหัวข้อ แปลและทำความเข้าใจ

2) ศึกษาและหาคุณสมบัติของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

3) ศึกษาและหาการเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

4) จัดทำโครงงาน

5) สอบโครงงาน

6) ส่งโครงงานฉบับสมบูรณ์

1.5 แผนดำเนินการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ.2561					
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.
1. ศึกษาค้นคว้าหัวข้อ แปลและทำความเข้าใจ	■					
2. ศึกษาและหาสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี		■	■			
3. ศึกษาและหาการเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี			■	■		
4. เขียนรายงานและส่งเล่มรายงาน					■	
5. ส่งโครงงานฉบับสมบูรณ์						■

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้สมบัติของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

2) ได้รับความรู้เกี่ยวกับสมการและการเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

3) ได้ฝึกกระบวนการคิดและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 ทฤษฎีบทและความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบท 1 การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

หลักข้อที่ 1

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n

ถ้า 1. $P(1)$ เป็นจริง

2. สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(1)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n

หลักข้อที่ 2

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n

สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $(P(1), P(2), P(3), ..., P(k))$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง แล้ว $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n

ทฤษฎีบท 2 อนุกรมเรขาคณิต

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งเขียนแทน $\sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}$ โดย a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

พิจารณา ให้ $$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad (2.1)$$

นำ (2.1)×r จะได้

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + ... + a_1 r^{n-3} + a_1 r^{n-2} + a_1 r^n \qquad (2.2)$$

จาก (2.1) และ (2.2) จะได้

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$(1-r)S_n = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{เมื่อ} \quad r \neq 1$$

หรือ

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{เมื่อ} \quad r \neq 1$$

อาจเขียนผลบวกของ n พจน์แรกได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

จาก

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{เมื่อ} \quad r \neq 1 \\ &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \qquad \text{เมื่อ} \quad r \neq 1 \\ &= \frac{a_1 - (a_1 r^n - 1)}{1-r} \end{aligned}$$

แต่ $a_n = a_1 r^{n-1}$

ดังนั้น $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$ หรือ $S_n = \dfrac{a_n r - a_1}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

สรุป ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{หรือ} \qquad S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \qquad \text{เมื่อ} \quad r \neq 1$$

เมื่อ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

a_1 แทนพจน์ที่ 1 a_n แทนพจน์ที่ n

r แทนอัตราส่วนร่วม พจน์ที่ $n+1$ หารด้วยพจน์ที่ n

บทที่ 3

สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

3.1 บทนำ

ในปี ค.ศ.1999 A.T.Benjamin and J.J.Quinn (1999) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเอกลักษณ์ของลำดับฟีโบนักชี และลำดับลูคัส ซึ่งอยู่ในรูปแบบดังนี้

สำหรับลำดับฟีโบนักชีนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad , n \geqslant 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

และสำหรับลำดับลูคัสโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad , n \geqslant 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$

ใน ค.ศ 2010 Singh et al. (2010) ได้ศึกษาลำดับคล้ายฟีโบนักชี S_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ในรูป

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \qquad , n \geqslant 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $S_0 = 2$ และ $S_1 = 2$

ในการศึกษาในครั้งนี้ได้สนใจศึกษาลำดับคล้ายฟีโบนักชีโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, n \geqslant 2$ โดยเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นใหม่แล้วนำ $4s+2$ คูณเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของลำดับฟีโบนักชีบวกกับลำดับลูคัส ดังนั้น จะได้ $S_0 = (4s+2)F_0 + L_0 = 2$ และ $S_1 = (4s+2)F_1 + L_1 = 4s+3$

ดังนั้น จากความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชีจะได้ลำดับ ตารางดังต่อไปนี้

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
L_n	2	1	3	4	7	11	18	$\cdots$
S_n	2	$4s + 3$	$4s + 5$	$8s + 8$	$12s + 13$	$20s + 21$	$32s + 34$	

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็น $t^2 - t - 1 = 0$ ซึ่งมีผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

ดังนั้น $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ เป็นผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะ

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 5}{4} \\ &= \frac{-4}{4} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 &= 1 + \alpha + 1 + \beta \\
&= 2 + \alpha + \beta \\
&= 3 && (3.5) \\
\alpha^3 + \beta^3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{16 + 3\sqrt{5} + \sqrt{5}^3 + 16 - 3\sqrt{5} - \sqrt{5}^3}{8} \\
&= \frac{32}{8} \\
&= 4 && (3.6)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก α เป็นผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะ จะได้

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 - \alpha - 1 &= 0 \\
\alpha^2 - 1 &= \alpha \\
\text{พิจารณา}\alpha - \alpha^{-1} &= \alpha - \frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \\
&= 1 && (3.7)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก β เป็นผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะ จะได้

$$
\begin{aligned}
\beta^2 - \beta - 1 &= 0 \\
\beta^2 - 1 &= \beta \\
\text{พิจารณา}\beta - \beta^{-1} &= \beta - \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \\
&= 1 && (3.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{-2} + \alpha^{-1} &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \\
&= 1 \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{-2} + \beta^{-1} &= \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1 + \beta}{\beta^2} \\
&= 1 \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{3} - \alpha^{-3} &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{16 + 8\sqrt{5}}{8}\right) - \left(\frac{8}{16 + 8\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{256 + 256\sqrt{5} + 320 - 64}{128 - 64\sqrt{5}} \\
&= \frac{512 + 256\sqrt{5}}{128 - 64\sqrt{5}} \\
&= 4 \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{3} - \beta^{-3} &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{3} \\
&= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{1 - \sqrt{5}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{16 - 8\sqrt{5}}{8}\right) - \left(\frac{8}{16 - 8\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{256 - 256\sqrt{5} + 320 - 64}{128 - 64\sqrt{5}} \\
&= \frac{512 - 256\sqrt{5}}{128 - 64\sqrt{5}} \\
&= 4 \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

สูตรไบเนตของลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ

$$
\begin{aligned}
S_n &= C_1\alpha^n + C_2\beta^n \\
&= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

ให้

$$S_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n \tag{3.13}$$

พิจารณา $n = 0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
S_0 &= C_1(\alpha^0) + C_2(\beta^0) \\
2 &= C_1 + C_2 \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

พิจารณา $n = 1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
S_1 &= C_1\alpha^1 + C_2\beta^1 \\
4s + 3 &= C_1\alpha + C_2\beta \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

นำ β คูณ (3.14) จะได้

$$2\beta = C_1\beta + C_2\beta \tag{3.16}$$

จาก (3.15),(3.16) และจาก (3.4) จะได้

$$
\begin{aligned}
4s + 3 - 2\beta &= C_1\alpha + C_2\beta - C_1\beta - C_2\beta \\
&= C_1\alpha - C_1\beta \\
&= C_1(\alpha - \beta) \\
C_1 &= \frac{4s + 3 - 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{4s + 3 - 1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{4s + 2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \tag{3.17}$$

นำ C_1 แทนใน (3.14) จะได้

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{4s + 2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} + C_2 \\
C_2 &= 2 - \left(\frac{4s + 2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{4s - 2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{5} - 4s - 2}{\sqrt{5}} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

ดังนั้น สูตรไบเนตของลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ

$$\begin{aligned}
S_n &= C_1\alpha^n + C_2\beta^n \\
&= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

โดยที่ $C_1 = \frac{4s + 2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ และ $C_2 = \frac{\sqrt{5} - 4s - 2}{\sqrt{5}}$

และพิจารณาหาค่า

$$\begin{aligned}
C_1C_2 &= \left(\frac{4s + 2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{5} - 4s - 2}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{4s\sqrt{5} - 4s^2 - 8s + 2\sqrt{5} - 8s - 4 + 5 - 4s\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{5} \\
&= \frac{-4s^2 - 16s + 1}{5} \\
&= \frac{1 - 4s^2 - 16s}{(\alpha - \beta)^2} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= \left(\frac{4s + 2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\sqrt{5} - 4s - 2}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{4s + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 4s - 2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$= \quad 2 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
C_1\alpha + C_2\beta &= \left(\frac{4s+2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-4s-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&\quad \left(\frac{4s+4s\sqrt{5}+2+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}+5-4s+4s\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{4s+4s\sqrt{5}+2+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+5+\sqrt{5}-5-4s+4s\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{8s\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= 4s+3
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
C_1\beta + C_2\alpha &= \left(\frac{4s+2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-4s-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{4s-4s\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}+5-4s-4s\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \\
&\quad \frac{4s-4s\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-5+\sqrt{5}+5-4s-4s\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-8s\sqrt{5}-4\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-8s\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= -4s-1
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
C_1\beta^2 + C_2\alpha^2 &= \left(\frac{4s+2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-4s-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{4s+2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-4s-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) \\
&= \left(\frac{4s-8s\sqrt{5}+20s+2-4\sqrt{5}+10+\sqrt{5}-10+5\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\right) \\
&+ \left(\frac{\sqrt{5}+10+5\sqrt{5}-4s-8s\sqrt{5}-20s-2-4\sqrt{5}-10}{4\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{-16s\sqrt{5}-8\sqrt{5}+12\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\
&= -4s-2+3 \\
&= 1-4s
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ในการศึกษาในครั้งนี้จะนำสูตรไบเนตที่ได้ของลำดับคล้ายฟีโบนักชีที่เกี่ยวข้องเพื่อนำไปใช้ในการหาผลรวมของจำนวนเต็มบวกใด ๆ ในทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

3.2 สมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ผลรวมของ $n+1$ พจน์แรก ของลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ

$$\sum_{k=0}^{n} S_k = S_{n+2} - 4s - 3$$

พิสูจน์ โดยใช้สูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_k &= S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n \\
&= \left[C_1\alpha^0 + C_2\beta^0\right] + \left[C_1\alpha + C_2\beta\right] + \left[C_1\alpha^2 + C_2\beta^2\right] + \ldots \\
&\quad + \left[C_1\alpha^n + C_2\beta^n\right] \\
&\quad \left[C_1\alpha^0 + C_1\alpha + C_1\alpha^2 + \ldots + C_1\alpha^n\right] + \left[C_2\beta^0 + C_2\beta + C_2\beta^2 + \ldots \right. \\
&\quad \left. + C_2\beta^n\right] \\
&= C_1\left[\alpha^0 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n\right] + C_2\left[\beta^0 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^n\right] \\
&= C_1\left[\frac{1-(\alpha^{2n})\alpha}{1-\alpha}\right] + C_2\left[\frac{1-(\beta^{2n})}{1-\beta}\right] \\
&= C_1\left[\frac{(1-\alpha^{n+1})(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right] + C_2\left[\frac{(1-\beta^{n+1})(1-\alpha)}{(1-\beta)(1-\alpha)}\right] \\
&= \frac{C_1(1-\beta-\alpha^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta) + C_2(1-\alpha-\beta^{n+1}+\alpha\beta^{n+1})}{1-\beta-\alpha+\alpha\beta} \\
&= \frac{(C_1 + C_1\beta - C_1\alpha^{n+1} + C_1\alpha^{n+1}\beta) + (C_2 - C_2\alpha - C_2\beta^{n+1} + C_2\beta^{n+1})}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} \\
&= \frac{C_1 + C_2 - C_1\beta - C_2\alpha - C_1\alpha^{n+1} - C_2\beta^{n+1} + C_1\alpha^{n+1}\beta + C_2\alpha\beta^{n+1}}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} \\
&= \frac{(C_1 + C_2) - (C_1\beta + C_2\alpha) - (C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}) + \alpha\beta(C_1\alpha^n + C_2\beta^n)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}
\end{aligned}$$

จาก (3.2),(3.3),(3.20) และ (3.22) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_k &= \frac{2-(-4s-1) - S_{n+1} + (-1)S_n}{1-1+(-1)} \\
&= \frac{2+4s+1-S_{n+1}-S_n}{-1}
\end{aligned}$$

$$= \quad S_{n+1} + S_n - 4s - 3$$

$$= \quad S_{n+2} - 4s - 3$$

ดังนั้น $\quad \sum_{k=0}^{n} S_k = S_{n+2} - 4s - 3$ □

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ผลรวมของ n พจน์แรกของดัชนีคี่ ของลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ

$$\sum_{k=1}^{n} S_{2k-1} = S_{2n} - 2$$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} S_{2k-1} &= S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2n-1} \\
&= \left[C_1\alpha + C_2\beta\right] + \left[C_1\alpha^3 + C_2\beta^3\right] + \left[C_1\alpha^5 + C_2\beta^5\right] \\
&\quad + \dots + \left[C_1\alpha^{2n-1} + C_2\beta^{2n-1}\right] \\
&= \left[C_1\alpha + C_1\beta + C_1\alpha^3 + \dots + C_1\alpha^{2n-1}\right] + \left[C_2\beta + C_2\beta^3 + C_2\beta^5\right. \\
&\quad \left. + \dots + C_2\beta^{2n-1}\right] \\
&= C_1\left[\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots + \alpha^{2n-1}\right] + C_2\left[\beta + \beta^3 + \beta^5 + \dots + \beta^{2n-1}\right] \\
&= C_1\left[\frac{\alpha - \alpha(\alpha^2)^n}{1 - \alpha^2}\right] + C_2\left[\frac{\beta - \beta(\beta^2)^n}{1 - \beta^2}\right] \\
&= C_1\alpha\left[\frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2}\right] + C_2\beta\left[\frac{1 - \beta^{2n}}{1 - \beta^2}\right] \\
&= C_1\alpha\left[\frac{(1 - \alpha^{2n})(1 - \beta^2)}{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}\right] + C_2\beta\left[\frac{(1 - \beta^{2n})(1 - \alpha^2)}{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)}\right] \\
&= \frac{C_1\alpha(1 - \beta^2 - \alpha^{2n} + \alpha^{2n}\beta^2) + C_2\beta(1 - \alpha^2 - \beta^{2n} + \alpha^2\beta^{2n})}{1 - \beta^2 - \alpha^2 + \alpha^2\beta^2} \\
&= \frac{C_1\alpha - C_1\alpha\beta^2 - C_1\alpha^{2n+1}\beta^2 + C_2\beta - C_2\alpha^2\beta - C_2\beta^{2n+1}}{1 - (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta^2)} \\
&\quad \frac{+C_2\alpha^2\beta^{2n+1}}{1 - (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta^2)} \\
&= \frac{-C_1\alpha - C_2\beta + C_1\alpha\beta^2 + C_2\alpha^2\beta + C_1\alpha^{2n+1} + C_2\beta^{2n+1}}{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha\beta)^2 - 1} \\
&\quad \frac{-C_1\alpha^{2n+1}\beta^2 - C_2\alpha^2\beta^{2n+1}}{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha\beta)^2 - 1} \\
&= \frac{(C_1\alpha^{2n+1} + C_2\beta^{2n+1}) - (C_1\alpha + C_2\beta) + \alpha\beta(C_1\beta + C_2\alpha)}{\alpha^2 + \beta - (\alpha\beta)^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{-(\alpha\beta)^2(C_1\alpha^{2n-1} + C_2\beta^{2n-1})}{\alpha^2 + \beta - (\alpha\beta)^2 - 1}$$

จาก (3.2), (3.5), (3.21) และ (3.22) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} S_{2k-1} &= \frac{S_{2n+1} - (4s+3) + (-1)(-4s-1) - (-1)^2 S_{2n-1}}{3 - (-1)^2 - 1} \\
&= \frac{S_{2n+1} - 4s - 3 + 4s + 1 - S_{2n-1}}{1} \\
&= S_{2n+1} - S_{2n-1} - 2 \\
&= S_{2n} - 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\quad \sum_{k=1}^{n} S_{2k-1} = S_{2n} - 2$ □

ทฤษฎีบท 3.3 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ผลรวมของ $n+1$ พจน์แรกของดัชนีคู่ ของลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ

$$\sum_{k=0}^{n} S_{2k} = S_{2n+1} - 4s - 1$$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนต์จากสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_{2k} &= S_0 + S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n} \\
&= \left[C_1\alpha^0 + C_2\beta^0\right] + \left[C_1\alpha^2 + C_2\beta^2\right] + \left[C_1\alpha^4 + C_2\beta^4\right] + \ldots \\
&\quad + \left[C_1\alpha^{2n} + C_2\beta^{2n}\right] \\
&= \left[C_1\alpha^0 + C_1\alpha^2 + C_1\alpha^4 + \ldots + C_1\alpha^{2n}\right] + \left[C_2\beta^0 + C_2\beta^2\right. \\
&\quad \left. + C_2\beta^4 + \ldots + C_2\beta^{2n}\right] \\
&= C_1\left[\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n}\right] + C_2\left[\beta^0 + \beta^2 + \beta^4 + \ldots + \beta^{2n}\right] \\
&= C_1\left[\frac{1 - \alpha^2(\alpha^2)^n}{1 - \alpha^2}\right] + C_2\left[\frac{1 - \beta^2(\beta^2)^n}{1 - \beta^2}\right] \\
&= C_1\left[\frac{(1 - \alpha^{2n+2})(1 - \beta^2)}{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}\right] + C_2\left[\frac{(1 - \beta^{2n+2})(1 - \alpha^2)}{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)}\right] \\
&= \frac{C_1(1 - \beta^2 - \alpha^{2n+2} + \alpha^{2n+2}\beta^2) + C_2(1 - \alpha^2 - \beta^{2n+2}}{1 - \alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2\beta^2} \\
&\quad \frac{+\alpha^2\beta^{2n+2})}{1 - \alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2\beta^2} \\
&= \frac{C_1 - C_1\beta^2 - C_1\alpha^{2n+2} + C_1\alpha^{2n+2}\beta^2 + C_2 - C_2\alpha^2}{1 - (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{-C_2\beta^{2n+2} + C_2\alpha^2\beta^{2n+2}}{1-(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\beta)^2} \\
= & \frac{-C_1 + C_1\beta^2 + C_2\alpha^{2n+2} - C_1\alpha^{2n+2}\beta^2 - C_2 + C_2\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2-(\alpha\beta)^2-1} \\
& \frac{+C_2\beta^{2n+2} - C_2\alpha^2\beta^{2n+2}}{\alpha^2+\beta^2-(\alpha\beta)^2-1} \\
= & \frac{(C_1\alpha^{2n+2} + C_2\beta^{2n+2}) - (C_1 + C_2) + (C_1\beta^2 + C_2\alpha^2)}{\alpha^2+\beta^2-(\alpha\beta)^2-1} \\
& \frac{-(\alpha\beta)^2(C_1\alpha^{2n} + C_2\beta^{2n})}{\alpha^2+\beta^2-(\alpha\beta)^2-1}
\end{aligned}
$$

จาก (3.2) ,(3.5), (3.20) และ (3.23) จะได้

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_{2k} &= \frac{S_{2n+2} - (2) + (1-4s) - (-1)^2 S_{2n}}{3-1-(-1)^2} \\
&= \frac{S_{2n+2} - 2 + 1 - 4s - S_{2n}}{1} \\
&= S_{2n+2} - S_{2n} - 4s - 1 \\
&= S_{2n+1} - 4s - 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{2k} = S_{2n+1} - 4s - 1$ □

ทฤษฎีบท 3.4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n} S_{3k} = \frac{S_{3n+3} + S_{3n} - 8s - 10}{4}$$

พิสูจน์ โดยใช้สูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} S_{3k} &= S_3 + S_6 + S_9 + \ldots + S_{3n} \\
&= \left[C_1\alpha^3 + C_2\beta^3\right] + \left[C_1\alpha^6 + C_2\beta^6\right] + \left[C_1\alpha^9 + C_2\beta^9\right] + \ldots \\
&\quad + \left[C_1\alpha^{3n} + C_2\beta^{3n}\right] \\
&= \left[C_1\alpha^3 + C_1\alpha^6 + C_1\alpha^9 + \ldots + C_1\alpha^{3n}\right] + \left[C_2\beta^3 + C_2\beta^6\right. \\
&\quad \left. + C_2\beta^9 + \ldots + C_2\beta^{3n}\right] \\
&= C_1\left[\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \ldots + \alpha^{3n}\right] + C_2\left[\beta^3 + \beta^6 + \beta^9 + \ldots + \beta^{3n}\right]
\end{aligned}
$$

$$= C_1\left[\frac{\alpha^3 - \alpha^3(\alpha^3)^n}{1-\alpha^3}\right] + C_2\left[\frac{\beta^3 - \beta^3(\beta^3)^n}{1-\beta^3}\right]$$

$$= C_1\left[\frac{(\alpha^3 - \alpha^{3n+3})(1-\beta^3)}{(1-\alpha^3)(1-\beta^3)}\right] + C_2\left[\frac{(\beta^3 - \beta^{3n+3})(1-\alpha^3)}{(1-\beta^3)(1-\alpha^3)}\right]$$

$$= C_1\left[\frac{\alpha^3 - \alpha^3\beta^3 - \alpha^{3n+3} + \alpha^{3n+3}\beta^3}{1-\beta^3-\alpha^3+\alpha^3\beta^3}\right] + C_2\left[\frac{\beta^3 - \beta^3\alpha^3 - \beta^{3n+3}}{1-\alpha^3-\beta^3+\beta^3\alpha^3}\right.$$

$$\left.\frac{-\beta^{3n+3} + \beta^{3n+3}\alpha^3}{1-\alpha^3-\beta^3+\beta^3\alpha^3}\right]$$

$$= \frac{C_1\alpha^3 - C_2\alpha^3\beta^3 - C_1\alpha^{3n+3} + C_1\alpha^{3n+3}\beta^3 + C_2\beta^3 - C_2\alpha^3\beta^3}{1-\alpha^3-\beta^3+\alpha^3\beta^3}$$

$$\frac{-C_2\beta^{3n+3} + C_2\alpha^3\beta^{3n+3}}{1-\alpha^3-\beta^3+\alpha^3\beta^3}$$

$$= \frac{(C_1\alpha^3 + C_2\beta^3) - (C_1\alpha^3\beta^3 + C_2\alpha^3\beta^3) - (C_1\alpha^{3n+3}}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)}$$

$$= \frac{(C_1\alpha^3 + C_2\beta^3) - (\alpha\beta)^3(C_1 + C_2) - (C_1\alpha^{3n+3} + C_2\beta^{3n+3})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)}$$

$$\frac{+(\alpha\beta)^3(C_1\alpha^{3n} + C_2\beta^{3n})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)}$$

จาก (3.2), (3.6) และ (3.20) จะได้

$$\sum_{k=1}^{n} S_{3k} = \frac{S_3 - (-1)^3(2) - S_{3n+3} + (-1)^3 S_{3n}}{(-1)^3 + 1 - 4}$$

$$= \frac{S_3 + 2 - S_{3n+3} - S_{3n}}{-4}$$

$$= \frac{S_{3n+3} + S_{3n} - S_3 - 2}{4}$$

$$= \frac{S_{3n+3} + S_{3n} - (8s+8) - 2}{4}$$

$$= \frac{S_{3n+3} + S_{3n} - 8s - 10}{4}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_{3k} = \frac{S_{3n+3} + S_{3n} - 8s - 10}{4}$ □

ทฤษฎีบท 3.5 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{n} S_{3k+1} = \frac{S_{3n+4} + S_{3n+1} - 4}{4}$$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n} S_{3k+1} = S_1 + S_4 + S_7 + \ldots + S_{3n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[C_1\alpha + C_2\beta\right] + \left[C_1\alpha^4 + C_2\beta^4\right] + \left[C_1\alpha^7 + C_2\beta^7\right] + \ldots \\
&\quad + \left[C_1\alpha^{3n+1} + C_2\beta^{3n+1}\right] \\
&= \left[C_1\alpha + C_1\alpha^4 + C_1\alpha^7 + \ldots + C_1\alpha^{3n+1}\right] + \left[C_2\beta + C_2\beta^4\right. \\
&\quad \left. + C_2\beta^7 + \ldots + C_2\beta^{3n+1}\right] \\
&= C_1\left[\alpha + \alpha^4 + \alpha^7 + \ldots + \alpha^{3n+1}\right] + C_2\left[\beta + \beta^4 + \beta^7 + \ldots + \beta^{3n+1}\right] \\
&= C_1\left[\frac{\alpha - \alpha^{3n+1}\alpha^3}{1-\alpha^3}\right] + C_2\left[\frac{\beta^3 - \beta^{3n+1}\beta^3}{1-\beta^3}\right] \\
&= C_1\left[\frac{(\alpha - \alpha^{3n+4})}{(1-\alpha^3)}\right] + C_2\left[\frac{(\beta - \beta^{3n+4})}{(1-\beta^3)}\right] \\
&= C_1\left[\frac{(\alpha - \alpha^{3n+4})(1-\beta^3)}{(1-\alpha^3)(1-\beta^3)}\right] C_2\left[\frac{(\beta - \beta^{3n+4})(1-\alpha^3)}{(1-\beta^3)(1-\alpha^3)}\right] \\
&= \frac{C_1(\alpha - \alpha\beta^3 - \alpha^{3n+4} + \alpha^{3n+4}\beta^3) + C_2(\beta - \beta\alpha^3 - \beta^{3n+4}}{1-\beta^3-\alpha^3+\alpha^3\beta^3} \\
&\quad \frac{+\beta^{3n+4}\alpha^3)}{1-\beta^3-\alpha^3+\alpha^3\beta^3} \\
&\quad \frac{C_1\alpha - C_1\alpha\beta^3 - C_1\alpha^{3n+4} + C_1\alpha^{3n+4}\beta^3 + C_2\beta - C_2\beta\alpha^3}{1-\beta^3-\alpha^3+\alpha^3\beta^3} \\
&\quad \frac{-C_2\beta^{3n+4} + C_2\beta^{3n+4}\alpha^3}{1-\beta^3-\alpha^3+\alpha^3\beta^3} \\
&= \frac{(C_1\alpha + C_2\beta) - (C_1\alpha\beta^3 + C_2\beta\alpha^3) - (C_1\alpha^{3n+4} + C_2\beta^{3n+4})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)} \\
&\quad \frac{+(C_1\alpha^{3n+4}\beta^3 + C_2\beta^{3n+4}\alpha^3)}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)} \\
&= \frac{(C_1\alpha + C_2\beta) + (\alpha\beta)(C_1\beta^2 + C_2\alpha^2) - (C_1\alpha^{3n+4} + C_2\beta^{3n+4})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)} \\
&\quad \frac{+(\alpha\beta)^3(C_1\alpha^{3n+1} + C_2\beta^{3n+1})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3+\beta^3)}
\end{aligned}
$$

จาก (3.2),(3.6),(3.21) และ (3.23) จะได้

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_{3k+1} &= \frac{4s + 3 - (-1)(1-4s) - S_{3n+4} + (-1)S_{3n+1}}{(-1)^3 + 1 - 4} \\
&= \frac{4s + 3 + 1 - 4s - S_{3n+4} - S_{3n+1}}{-4} \\
&= \frac{S_{3n+4} + S_{3n+1} - 4}{4}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{3k+1} = \frac{S_{3n+4} + S_{3n+1} - 4}{4}$ □

ทฤษฎีบท 3.6 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{n} S_{3k+2} = \frac{S_{3n+5} + S_{3n+2} - 8s - 6}{4}$$

พิสูจน์ โดยสูตร[illegible]สมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_{3k+2} &= S_2 + S_5 + S_8 + \dots + S_{3n+2} \\
&= \left[C_1\alpha^2 + C_2\beta^2\right] + \left[C_1\alpha^5 + C_2\beta^5\right] + \left[C_1\alpha^8 + C_2\beta^8\right] + \dots \\
&\quad + \left[C_1\alpha^{3n+2} + C_2\beta^{3n+2}\right] \\
&= \left[C_1\alpha^2 + C_1\alpha^5 + C_1\alpha^8 + \dots + C_1\alpha^{3n+2}\right] + \left[C_2\beta^2 + C_2\beta^5\right. \\
&\quad \left. + C_2\beta^8 + \dots + C_2\beta^{3n+2}\right] \\
&= C_1\left[\alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^8 + \dots + \alpha^{3n+2}\right] + C_2\left[\beta^2 + \beta^5 + \beta^8 + \dots\right. \\
&\quad \left. + \beta^{3n+2}\right] \\
&= C_1\left[\frac{\alpha^2 - \alpha^{3n+2}\alpha^3}{1-\alpha^3}\right] + C_2\left[\frac{\beta^2 - \beta^{3n+2}\beta^3}{1-\beta^3}\right] \\
&= C_1\left[\frac{(\alpha^2 - \alpha^{3n+5})(1-\beta^3)}{(1-\alpha^3)(1-\beta^3)}\right] C_2\left[\frac{(\beta^2 - \beta^{3n+5})(1-\alpha^3)}{(1-\beta^3)(1-\alpha^3)}\right] \\
&= \frac{C_1(\alpha^2 - \alpha^2\beta^3 - \alpha^{3n+5} + \alpha^{3n+5}\beta^3) + C_2(\beta^2 - \beta^2\alpha^3 - \beta^{3n+5}}{1 - \beta^3 - \alpha^3 + \alpha^3\beta^3} \\
&\quad \frac{+\beta^{3n+5}\alpha^3)}{1 - \beta^3 - \alpha^3 + \alpha^3\beta^3} \\
&= \frac{C_1\alpha^2 - C_1\alpha^2\beta^3 - C_1\alpha^{3n+5} + C_1\alpha^{3n+5}\beta^3 + C_2\beta^2 - C_2\beta^3\alpha^2}{1 - \beta^3 - \alpha^3 + \alpha^3\beta^3} \\
&\quad \frac{-C_2\beta^{3n+5} + C_2\beta^{3n+5}\alpha^3}{1 - \beta^3 - \alpha^3 + \alpha^3\beta^3} \\
&= \frac{(C_1\alpha^2 + C_2\beta^2) - (\alpha\beta)^2(C_1\beta + C_2\alpha) - (C_1\alpha^{3n+5} + C_2\beta^{3n+5})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3 + \beta^3)} \\
&\quad \frac{+(\alpha\beta)^3(C_1\alpha^{3n+2} + C_2\beta^{3n+2})}{(\alpha\beta)^3 + 1 - (\alpha^3 + \beta^3)}
\end{aligned}$$

จาก (3.2),(3.6) และ (3.22)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_{3k+2} &= \frac{S_2 - (-1)^2(-4s-1) - S_{3n+5} + (-1)^3 S_{3n+2}}{(-1)^3 + 1 - (4)} \\
&= \frac{S_2 + 4s + 1 - S_{3n+5} - S_{3n+2}}{-4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{S_{3n+5} + S_{3n+2} - S_2 - 4s - 1}{4}$$
$$= \frac{S_{3n+5} + S_{3n+2} - (4s + 5) - 4s - 1}{4}$$
$$= \frac{S_{3n+5} + S_{3n+2} - 8s - 6}{4}$$

ดังนั้น $\sum_{k=0}^{n} S_{3k+2} = \frac{S_{3n+5} + S_{3n+2} - 8s - 6}{4}$ □

ทฤษฎีบท 3.7 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_n^2 = S_nS_{n+1} - S_nS_{n-1}] \qquad ; n \geq 1$$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= (C_1\alpha^n + C_2\beta^n)^2 \\
&= C_1^2\alpha^{2n} + 2C_1C_2\alpha^n\beta^n + C_2^2\beta^{2n} \\
S_nS_{n+1} - S_nS_{n-1} &= (C_1\alpha^n + C_2\beta^n)(C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}) \\
&\quad -(C_1\alpha^n + C_2\beta^n)(C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}) \\
&= (C_1^2\alpha^{2n+1} + C_1C_2\alpha^n\beta^{n+1} + C_1C_2\alpha^{n+1}\beta^n + C_2^2\beta^{2n+1}) \\
&\quad -(C_1^2\alpha^{2n-1} + C_1C_2\alpha^n\beta^{n-1} + C_1C_2\alpha^{n-1}\beta^n + C_2^2\beta^{2n-1}) \\
&= (C_1^2\alpha^{2n+1} - C_2\alpha^{2n-1}) + (C_1C_2\alpha^n\beta^{n+1} - C_1C_2\alpha^n\beta^{n-1}) \\
&\quad +(C_1C_2\alpha^{n+1}\beta^n - C_1C_2\alpha^{n-1}\beta^n) + (C_2^2\beta^{2n+1} - C_2^2\beta^{2n-1}) \\
&= C_1^2\alpha^{2n}(\alpha - \alpha^{-1}) + C_1C_2\alpha^n\beta^n(\beta - \beta^{-1}) + C_1C_2\alpha^n\beta^n \\
&\quad (\alpha - \alpha^{-1}) + C_2^2\beta^{2n}(\beta - \beta^{-1})
\end{aligned}$$

จาก (3.7) และ (3.8)

$$S_nS_{n+1} - S_nS_{n-1} = C_1^2\alpha^{2n} + 2C_1C_2\alpha^n\beta^n + C_2^2\beta^{2n}$$

ดังนั้น $S_n^2 = S_nS_{n+1} - S_nS_{n-1}$ □

ทฤษฎีบท 3.8 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_n^2 = S_nS_{n-2} + S_nS_{n-1} \qquad , n \geq 2$$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= [(C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}) - (C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1})] \\
&= [(C_1\alpha^{n+1} - C_1\alpha^{n-1}) + (+C_2\beta^{n+1} + C_2\beta^{n-1})] \\
&= [C_1\alpha^n(\alpha - \alpha^{-1}) + C_2\beta^n(\beta - beta^{-1})]^2 \\
&= [C_1\alpha^n(1) + C_2\beta^n(1)]^2 \\
&= C_1^2\alpha^{2n} + 2C_1C_2\alpha^n\beta^n + C_2^2\beta^{2n} \\
S_nS_{n-2} + S_nS_{n-1} &= (C_1\alpha^n + C_2\beta^n)(C_1\alpha^{n-2} + C_2\beta^{n-2}) + (C_1\alpha^n + C_2\beta^n) \\
&\quad (C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}) \\
&\quad [illegible] \\
&\quad [illegible] \\
&= (C_1^2\alpha^{2n-2} + C_2^2\alpha^{2n-1}) + (C_1C_2\alpha^n\beta^{n-2} + C_1C_2\alpha^n\beta^{n-1}) \\
&\quad +(C_1C_2\alpha^{n-2}\beta^n + C_1C_2\alpha^{n-1}\beta^n) + (C_2^2\beta^{2n-2} + C_2^2\beta^{2n-1}) \\
&= C_1^2\alpha^{2n}(\alpha^{-2} + \alpha^{-1}) + C_1C_2\alpha^n\beta^n(\beta^{-2} + \beta^{-1}) + C_1C_2\alpha^n\beta^n \\
&\quad (\alpha^{-2} + \alpha^{-1}) + C_2^2\beta^{2n}(\beta^{-2} + \beta^{-1})
\end{aligned}$$

จาก (3.9) , (3.10)

$$S_nS_{n-2} + S_nS_{n-1} = C_1^2\alpha^{2n} + 2C_1C_2\alpha^n\beta^n + C_2^2\beta^{2n}$$

ดังนั้น $\quad (S_{n+1} - S_{n-1})^2 = S_nS_{n-2} + S_nS_{n-1}$ □

ทฤษฎีบท 3.9 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_{n+2} - S_{n-1} = 2S_n \qquad , n \geq 1$$

พิสูจน์

$$S_{n+2} - S_{n+1} = S_n \qquad (3.24)$$

$$S_{n+1} - S_{n-1} = S_n \qquad (3.25)$$

จาก (3.24) และ (3.25) จะได้

$$S_{n+2} - S_{n-1} = 2S_n$$

□

ทฤษฎีบท 3.10 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_{n+3} - S_{n-3} = 4S_n \qquad ,n \geq 3$$

พิสูจน์ โดยใช้สูตรไบเนตจากสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned} S_{n+3} - S_{n-3} &= (C_1\alpha^{n+3} + C_2\beta^{n+3}) - (C_1\alpha^{n-3} + C_2\beta^{n-3}) \\ &= (C_1\alpha^{n+3} - C_1\alpha^{n-3}) + (C_2\beta^{n+3} - C_2\beta^{n-3}) \\ &= C_1\alpha^n(\alpha^3 - \alpha^{-3}) + C_2\beta^n(\beta^3 - \beta^{-3}) \end{aligned}$$

จาก (3.11) และ (3.12)

$$\begin{aligned} S_{n+3} - S_{n-3} &= C_1\alpha^n(4) + C_2\beta^n(4) \\ &= 4(C_1\alpha^n + C_2\beta^n) \\ &= 4S_n \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_{n+3} - S_{n-3} = 4S_n$ □

3.3 การเชื่อมโยงสูตรของลำดับฟีโบนักชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายฟีโบนักชี

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนักชี F_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ และจากลำดับลูคัสนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด L_n คือ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$ จะได้ลำดับดังตารางต่อไปนี้

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
L_n	2	1	3	4	7	11	18	$\cdots$

ทฤษฎีบท 3.11 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะได้ว่า

$$S_n = (4s + 2)F_n + L_n \qquad , n \geq 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน ข้อความ $S_n = (4s + 2)F_n + L_n$

จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} S_1 &= 4s + 3 \\ (4s + 2)F_1 + L_1 &= (4s + 2)(1) + 1 \\ &= 4s + 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_1 = (4s + 2)F_1 + L_1$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $k \geq 1$

สมมุติให้ $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(k-1), P(k)$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง นั่นคือจะต้องแสดงว่า $S_{k+1} = (4s + 2)F_{k+1} + L_{k+1}$

เนื่องจาก $P(k - 1)$ และ $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$S_{k-1} = (4s + 2)F_{k-1} + L_{k-1} \qquad (3.26)$$

$$S_k = (4s + 2)F_k + L_{2k} \qquad (3.27)$$

จาก (3.26) และ (3.27)

$$\begin{aligned} (S_{k-1} + S_k) &= (4s + 2F_{k-1} + L_{k-1}) + (4s + 2F_k + L_{2k}) \\ S_{k+1} &= (4s + 2)F_{k+1} + L_{k+1} \end{aligned}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะสรุปได้ว่า $S_n = (4s + 2)F_n + L_n$ เป็นจริง $\square$

ทฤษฎีบท 3.12 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_n = (4s + 3)F_n + 2F_{n-1} \qquad , n \geq 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $S_n = (4s + 3)F_n + 2F_{n-1}$

จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} S_1 &= 4s + 3 \\ (4s + 3)F_1 + 2F_0 &= (4s + 3)(1) + 2(0) \\ &= 4s + 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_1 = (4s + 3)F_1 + 2F_0$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $k \geq 1$

สมมติให้ $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(k-1), P(k)$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k - 1)$ และ $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$\begin{aligned} S_{k-1} &= (4s + 3)F_{k-1} + 2F_{(k-1)-1} \\ S_{k-1} &= (4s + 3)F_{k-1} + 2F_{k-2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$S_k = (4s + 3)F_k + 2F_{k-1} \tag{3.29}$$

จาก (3.28) และ (3.29)

$$\begin{aligned} S_{k-1} + S_k &= (4s + 3)(F_{k-1} + F_k) + 2(F_{k-2} + F_{k-1}) \\ S_{k+1} &= (4s + 3)F_{k+1} + 2F_k \end{aligned}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะสรุปได้ว่า $S_n = (4s + 3)F_n + 2F_{n-1}$ เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 3.13 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_{n+1} + S_{n-1} = (4s+3)L_n + 2L_{n-1} \qquad , n \geq 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $S_{n+1} + S_{n-1} = (4s+3)L_n + 2L_{n-1}$

จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} S_2 + S_0 &= 4s + 5 + 2 \\ &= 4s + 7 \\ (4s+3)L_1 + 2L_0 &= (4s+3)(1) + 2(2) \\ &= 4s + 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_2 + S_0 = (4s+3)L_1 + 2L_0$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $k > 1$

สมมุติให้ $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(k-1), P(k)$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k-1)$ และ $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$\begin{aligned} S_{(k-1)+1} + S_{(k-1)-1} &= (4s+3)L_{k-1} + 2L_{(k-1)-1} \\ S_k + S_{k-2} &= (4s+3)L_{k-1} + 2L_{k-2} \qquad (3.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{k+1} + S_{k-1} &= (4s+3)L_k + 2L_{(k)-1} \\ &= (4s+3)L_k + 2L_{k-1} \qquad (3.31) \end{aligned}$$

จาก (3.30) และ (3.31)

$$\begin{aligned} (S_k + S_{k+1}) + (S_{k-2} + S_{k-1}) &= (4s+3)(L_{k-1} + L_k) + 2(L_{k-2} + L_{k-1}) \\ S_{k+2} + S_k &= (4s+3)L_{k+1} + 2L_k \end{aligned}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะสรุปได้ว่า $S_{n+1} + S_{n-1} = (4s + 3)L_n + 2L_{n-1}$ เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 3.14 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_{n+1} + S_{n-1} = (4s + 3)L_n + 2L_{n-1}, \quad n \geq 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน ข้อความ $S_{n+1} + S_{n-1} = (4s + 3)L_n + 2L_{n-1}$

จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} S_2 + S_0 &= 4s + 5 + 2 \\ &= 4s + 7 \\ (4s + 3)L_1 + 2L_0 &= (4s + 3)(1) + (2)(2) \\ &= 4s + 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_2 + S_0 = (4s + 3)L_1 + 2L_0$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยที่ $k \geq 1$

สมมุติให้ $P(1), P(2), P(3), ..., P(k-1), P(k)$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k-1)$ และ $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$S_{(k-1)+1} + S_{(k-1)-1} = S_1L_{(k-1)} + S_0L_{(k-1)-1}$$

$$S_k + S_{k-2} = (4s + 3)L_{k-1} + 2L_{k-2} \qquad (3.32)$$

$$S_{k+1} + S_{k-1} = (4s + 3)L_k + 2L_{k-1} \qquad (3.33)$$

จาก (3.32) และ (3.33)

$$\begin{aligned} (S_k + S_{k-2}) + (S_{k+1} + S_{k-1}) &= ((4s + 3)L_{k-1} + 2L_{k-2}) + (S_1L_k + S_0L_{k-1}) \\ (S_k + S_{k+1}) + (S_{k-2} + S_{k-1}) &= (4s + 3)(L_{k-1} + L_k) + 2(L_{k-2} + L_{k-1}) \\ S_{k+2} + S_k &= (4s + 3)L_{k+1} + 2L_k \end{aligned}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะสรุปได้ว่า $S_{n+1} + S_{n-1} = (4s + 3)L_n + 2L_{n-1}$ เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 3.15 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$S_{n+1} - S_{n-1} = (4s + 3)F_n + 2F_{n-1}, \quad n \geq 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน ข้อความ $S_{n+1} - S_{n-1} = (4s + 3)F_n + 2F_{n-1}$

จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} S_2 - S_0 &= (4s + 5) - 2 \\ &= 4s + 3 \\ (4s + 3)F_1 + 2F_0 &= (4s + 3)(1) + (2)(0) \\ &= 4s + 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_2 - S_0 = (4s + 3)F_1 + 2F_0$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $k \geq 1$

สมมุติให้ $P(1), P(2), P(3), ..., P(k - 1), P(k)$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k - 1)$ และ $P(k)$ เป็นจริง จะได้

$$\begin{aligned} S_{(k-1)+1} - S_{(k-1)-1} &= S_1F_{(k-1)} + S_0F_{(k-1)-1} \\ S_k - S_{k-2} &= (4s + 3)F_{k-1} + 2F_{k-2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$S_{k-1} - S_{k-1} = (4s + 3)F_k + 2F_{k-1} \quad (3.35)$$

จาก (3.34) และ (3.35)

$$\begin{aligned} (S_k - S_{k-2}) + (S_{k-1} - S_{k-1}) &= ((4s + 3)F_{k-1} + 2F_{k-2}) + ((4s + 3)F_k + 2F_{k-1}) \\ (S_k - S_{k-1}) - (S_{k-2} - S_{k-1}) &= (4s + 3)(F_{k-1} + F_k) + 2(F_{k-1} + F_{k-1}) \\ S_{k+2} - S_k &= (4s + 3)F_{k+1} + 2F_k \end{aligned}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะสรุปได้ว่า $S_{n+1} - S_{n-1} = ()4s + 3(F_n + 2F_{n-1}$ เป็นจริง □

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาโครงงานครั้งนี้ เราได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับคล้ายฟีโบนักชี ซึ่งนิยามอยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $S_n = S_{n-1} + S_{n+2}, n \geqslant 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $S_0 = 2, S_1 = 4s + 3$ และมีการศึกษาสมบัติของลำดับคล้ายฟีโบนักชี คือ ผลรวมของ $n + 1$ ของพจน์แรก, ผลรวมของ n พจน์แรกของดัชนี่คี่, ผลรวมของ $n + 1$ พจน์แรกของดัชนี่คู่, ผลรวมของจำนวนเต็มบวกใด ๆ และเอกลักษณ์บางประการของการเชื่อมโยงสูตรของลำดับคล้ายฟีโบนักชี ลำดับฟีโบนักชี และลำดับลูคัส

เอกสารอ้างอิง

A.T.Benjamin, & J.J.Quinn. (1999). Fibonacci and lucas identities. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 30*(5), 359-366.

Singh, B., Sikhwal, O., & Bhatnagar, S. (2010). Fibonacci-like sequence and its properties. *Trends in Cognitive Sciences*, 5(18), 859-868.