



รายงานวิจัย

การวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาด *SIQS* เมื่อมีการเพิ่มของ

ประชากรแบบโลจิสติก

Stability Analysis of an *SIQS* Epidemic Model with Logistic Population

Growth

วัชรพงศ์ จินดาพันธ์

สิทธิพงศ์ ทอสาย

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา



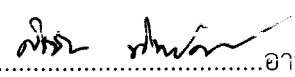
ใบรับรองงานวิจัย
มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ชื่อเรื่องงานวิจัย การวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาดของ $SIQS$ เมื่อมีการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก
Stability Analysis of an $SIQS$ Epidemic Model with Logistic Population Growth

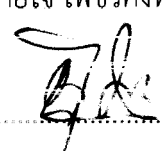
ชื่อผู้ทำงานวิจัย วัชรพงศ์ จินดาพันธ์ และ สิทธิพงศ์ ทอสาย

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัย

.....อาจารย์ที่ปรึกษาประธานกรรมการสอบ
(อาจารย์อดิศักดิ์ เต็มเพ็ชรหนอง) (อาจารย์सानิตย์ ฤทธิเดช)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมกรรมการสอบ
(อาจารย์ ดร.ศิริฉัตร ทิพย์ศรี) (อาจารย์สายใจ เพชรคงทอง)

.....ประธานหลักสูตร
(อาจารย์सानิตย์ ฤทธิเดช)

.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุมัติ เดชนะ)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เมื่อวันที่..... 27 เม.ย. 2567

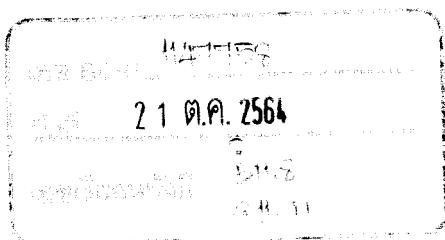
ลิขสิทธ์มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

ชื่อเรื่อง	การวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาด <i>SIQS</i> เมื่อมีการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก	
ชื่อผู้ทำงานวิจัย	วัชรพงษ์ จินดาพันธ์	รหัสนักศึกษา 584254024
	สิทธิพงษ์ ทอดสาย	รหัสนักศึกษา 584254029
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์อุทิศศักดิ์ เต็มเพชรหม่อง	
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อาจารย์ ดร.ศิริฉัตร ทิพย์ศรี	
หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต	สาขาวิชาคณิตศาสตร์	
สถาบัน	มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา	
ปีการศึกษา	2561	

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาดเมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อ และกลุ่มติดเชื้อมีภูมิคุ้มกัน ผลการศึกษารูปแบบจำลองนี้มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ ผลการวิเคราะห์แบบจำลองโดยใช้ทฤษฎีบทเสถียรภาพและผลเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง ในทางกลับกันหากค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ นอกจากนี้ยังพบว่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับแปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน นั่นคือหากลดอัตราขีดความสามารถในการรองรับก็จะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อลดลง

คำสำคัญ : แบบจำลองการระบาด เสถียรภาพ ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน การเพิ่มแบบโลจิสติก



Project Title	Stability analysis of an <i>SIQS</i> Epidemic Model with Logistic Population Growth	
Authors	Watcharapong Jindaphan	Student ID 584254024
	Sittipong Torsai	Student ID 584254029
Advisor	Lect. Adisak Denphetnong	
Co-Advisor	Dr. Sirachat Tipsri	
Bachelor of Science	Program in Mathematics	
Institute	Songkhla Rajabhat University	
Academic Year	2561	

ABSTRACT

This study aims to develop epidemic model with logistic population growth. The population is divided into 3 groups : susceptible, infected and quarantine. The results find that the model exhibits two equilibriums - disease free and endemic equilibriums. The analysis of the stability theory and numerical simulation indicate that the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when basic reproduction number is less than unity. On the contrary, basic reproduction number is greater than unity, the endemic equilibrium is locally asymptotically stable. Additionally, our findings show that the carrying capacity rate varies as basic reproduction number. Therefore, decreasing carrying capacity rate results in decreased infected.

Keywords : Epidemic model, Stability, Basic reproduction number, Logistic Growth

คำนำ

รายงานการศึกษาโครงการทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาวิชา 4574902 โครงการทางคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรเวศน์ ซึ่งผู้จัดทำมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง และวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองเพื่อให้สอดคล้องกับค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองที่มีเสถียรภาพ

ผู้จัดทำ ขอขอบพระคุณ อาจารย์อดิศักดิ์ เต็มเพ็ชรหนอง และ อาจารย์ ดร.ศิริฉัตร ทิพย์ศรี ผู้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และช่วยเหลือในการทำโครงการครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

วัชรพงศ์ จินดาพันธ์ และ สิทธิพงศ์ ทอสาย

บูรพา พันธ์ 2562



กิตติกรรมประกาศ

การดำเนินโครงการ การวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาด *SIRS* เมื่อมีการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีทั้งนี้เพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้ทรงความรู้หลาย ๆ ท่านโดยเนพะ ระยงยัง อาจารย์ยอดเยี่ยมดีเด่นเพ็ชรหนอง อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ และอาจารย์ ดร. ศิรฉัตร ทิพย์ศรี อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมโครงการ ที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ จนกระทั่งโครงการฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ ขอขอบคุณพี่ ๆ และเพื่อน ๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกคน ที่คอยให้คำแนะนำ และกำลังใจ รวมถึงการช่วยเหลือที่มีให้กันมาตลอด

ขอขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ที่คอยดูแลและให้โอกาสทางการศึกษาและเป็นกำลังใจสำคัญที่สุดที่ทำให้โครงการฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์



วัชรพงศ์ ฉิมดาพันธ์ และ สิทธิพงศ์ ทอสาวย

กุมภาพันธ์ 2562

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ก
Abstract	ข
คำนำ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญ	จ
สารบัญตาราง	ช
สารบัญรูป	ซ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย	1
1.2 จุดประสงค์	3
1.3 ขอบเขตการศึกษา	3
1.4 วิธีดำเนินการศึกษา	3
1.5 แผนดำเนินการศึกษา	4
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 ความรู้พื้นฐาน	5
2.1.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก	5
2.1.2 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าระดับการติดเชื้อ	6
2.1.3 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์	6
2.1.4 การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองโดยใช้วิธีรันถัดไป	10
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	11
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	17
3.1 การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	17
3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง	19
3.2.1 จุดสมดุลของแบบจำลองคณิตศาสตร์	19

	หน้า
3.2.2 ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน	20
3.2.3 เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง	22
3.3 การวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง	24
 บทที่ 4 สรุปผลและวิจารณ์	 29
 ภาคผนวก A	 31
 เอกสารอ้างอิง	 44



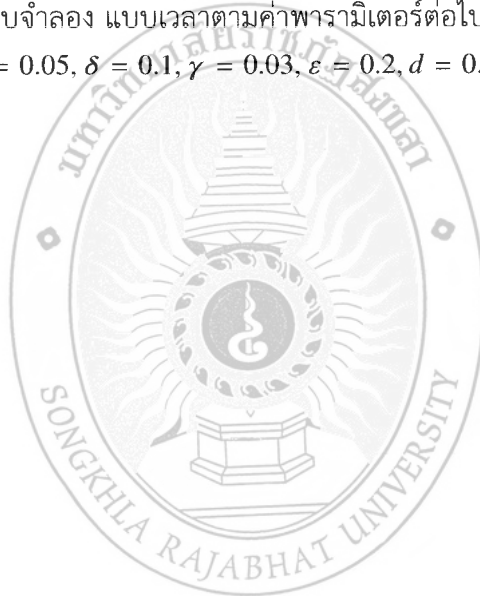
สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
3.1	พารามิเตอร์และความหมายของแต่ละตัวแปร	18
3.2	ความหมายและค่าของพารามิเตอร์	24
3.3	ความสัมพันธ์ระหว่างค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานและอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร	27



สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
1.1	เปรียบเทียบการเข้าของประชากรแบบคงที่และแบบโลจิสติก	2
2.1	กราฟการเพิ่มของประชากรแบบ Logistic Population Growth	5
2.2	แสดงตัวอย่างค่าระดับการติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 3	6
3.1	แบบจำลองการระบาด <i>SIQS</i> เมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก	17
3.2	แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta = 0.0014$ จะได้ $R_0 < 1$	25
3.3	แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta = 0.05$ จะได้ $R_0 > 1$	26
3.4	แสดงอัตราค่าขีดความสามารถในการรองรับประชากรในกลุ่มประชากรที่ติดเชื้ในรูปแบบจำลอง แบบเวลาตามค่าพารามิเตอร์ต่อไปนี้ $r = 1, K = 50, 70$ และ $90, \beta = 0.05, \delta = 0.1, \gamma = 0.03, \varepsilon = 0.2, d = 0.1$ และ $\alpha = 0.1$	28



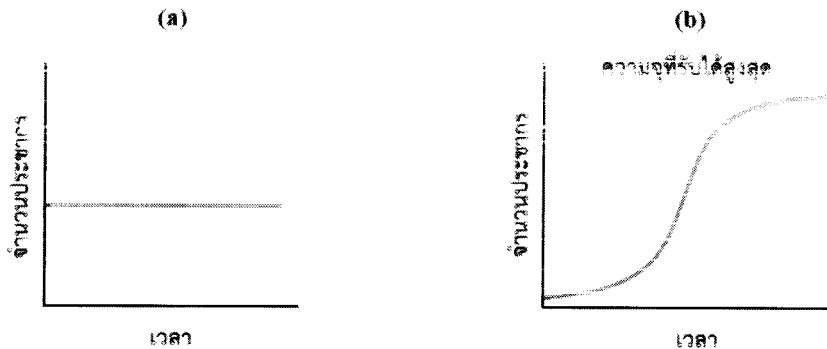
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย

โรคระบาด (Epidemic) คือ สถานการณ์การติดเชื้อโรคหรือโรคติดเชื้อที่เกิดขึ้นในระยะเวลาเดียวกันในชุมชนหรือในแหล่งหนึ่งแหล่งใดในอัตราสูงกว่าสถานการณ์ปกติที่ควรเป็น โดยการติดเชื้อนั้นลุกลามแพร่กระจายอยู่ในชุมชนหรือในแหล่งนั้น ๆ ที่อยู่ใกล้เคียงจุดเริ่มต้นของโรคและสามารถแพร่กระจายลุกลามไปยังชุมชนอื่น ๆ ที่อยู่ไกล ๆ ออกไปได้หลาย ๆ ชุมชนหรือหลาย ๆ สถานที่ (พงทอง ไกรพิบูลย์, 2558) จากปัญหาที่พบในชุมชนมีประชากรที่ติดเชื้อสูงกว่าสถานการณ์ปกติ เพราะมีอัตราประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อสูงเกินไปจึงจะต้องมีความสมดุลของจำนวนประชากรในชุมชนนั้นเพื่อเป็นการลดพื้นที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ซึ่งการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อเป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคเพื่อช่วยลดจำนวนประชากรในการติดเชื้อและการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติกเป็นอีกวิธีหนึ่งเช่นกันที่สมารถควบคุมการระบาดของโรคได้และเมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติกมาเปรียบเทียบกับกราฟการเพิ่มประชากรแบบคงที่ จะเห็นได้ว่าการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติกมีความสมจริงมากกว่าการเพิ่มประชากรแบบคงที่ เพราะการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติกเป็นการเพิ่มที่มีรูปแบบการเพิ่มลักษณะเป็นรูปตัวเอส (S-shape) หรือ กราฟแบบซิงมอยด์ (sigmoidal curve) ซึ่งแบ่งระยะต่าง ๆ ออกได้เป็น 4 ระยะด้วยกัน คือ ระยะที่ 1 มีการเพิ่มจำนวนประชากรอย่างช้า ๆ เนื่องจากเป็นระยะเริ่มต้น จำนวนประชากรมีน้อย และมีอัตราการเกิดสูงกว่าอัตราการตายเพียงเล็กน้อย ระยะที่ 2 มีการเพิ่มจำนวนประชากรอย่างรวดเร็ว เนื่องจากประชากรมีจำนวนมากขึ้น และสามารถปรับตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อมได้ดี มีอัตราการเกิดสูงกว่าอัตราการตายมาก ระยะที่ 3 มีการเพิ่มประชากรช้าลง เนื่องจากมีตัวต้านทานในสิ่งแวดล้อมเข้ามามีบทบาทในการเพิ่มจำนวนประชากร เช่น แหล่งอาหารและแหล่งที่อยู่อาศัยค่อนข้างจำกัด มีของเสียจากเมแทบอลิซึมมากขึ้น มีการแก่งแย่งแข่งขันของประชากรมากขึ้น เป็นต้น ระยะที่ 4 มีการเพิ่มจำนวนประชากรค่อนข้างคงที่ เป็นช่วงที่ประชากรอยู่ในภาวะสมดุล เนื่องจากประชากรสามารถปรับตัวให้เหมาะกับตัวต้านทานในสิ่งแวดล้อมได้ ทำให้มีอัตราการเกิดใกล้เคียงกับอัตราการตาย จำนวนประชากรจึงค่อนข้างจะคงที่ อาจจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงบ้างเล็กน้อย (fluctuation) แต่ก็ไม่ทำให้ขนาดประชากรเปลี่ยนแปลงไปมากนัก ถือได้ว่าระยะนี้เป็นระยะที่ขนาดประชากรมีความเหมาะสมกับสภาพแวดล้อมรอบด้าน โดยสภาพแวดล้อมที่สามารถรองรับประชากรได้มากที่สุดนี้ เรียกว่า ค่าขีดความสามารถในการรองรับ (Carrying capacity)

(ภูภัทร แก้วยอดจันทร์, 2561) แต่การเพิ่มประชากรแบบคงที่เป็นการเพิ่มจำนวนประชากรเท่ากันทุก
ระยะและเมื่อนำการเพิ่มประชากรทั้ง 2 แบบ มาเปรียบเทียบกันจะได้ดังรูปที่ 1.1



(a) การเพิ่มประชากรแบบคงที่ (b) การเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก

รูปที่ 1.1 เปรียบเทียบการเข้าประชากรแบบคงที่และแบบโลจิสติก

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคโดยส่วนมากจะเป็นแบบจำลองที่มีอัตราการเพิ่มประชากรแบบคงที่ ซึ่งได้รับการศึกษาแบบจำลองการระบาดโดยมีสมมติฐานว่ากลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการเพิ่มของประชากรแบบคงที่ อย่างไรก็ตามแบบจำลองการระบาดของ *SIRB* ของ Muhammad et al. (2015) ได้ศึกษาพบว่า มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ เมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพ ถ้า $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพและแบบจำลองการระบาดของ *SIQS* และ *SIQR* ของ Herbert, Zhien, and Shengbing (2002) ได้ศึกษาผลกระทบของการคัดแยกในแบบจำลอง *SIQS* และ *SIQR* 6 แบบจำลองโดยมีอัตราการอุบัติการณ์ 3 แบบ พบว่าแบบจำลองส่วนใหญ่ที่มีจุดสมดุลโรคคงอยู่จะมีเสถียรภาพและมี bifurcation หลายชนิด เกิดขึ้นในบางแบบจำลอง สำหรับแบบจำลองการระบาดที่มีการเพิ่มขึ้นของประชากรแบบโลจิสติกได้มีการศึกษาแบบจำลองการระบาดของ Karam, Adil, and Youssef (2016) ได้ศึกษาแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของไวรัสตับอักเสบบี ด้วยการเพิ่มของเซลล์ตับแบบโลจิสติกและพบว่าเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ใช้การวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขในการพิจารณา

ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคจากแบบจำลองการระบาดที่รู้จักกันในรูปแบบ *SIQS* ที่มีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบคงที่ (Herbert, Zhien, & Shengbing, 2002) มาเป็นแบบจำลองการระบาดในรูปแบบ *SIQS* โดยมีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก

1.2 จุดประสงค์

- 1) เพื่อพัฒนาแบบจำลองการระบาด *SIQS* เมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก
- 2) เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง
- 3) เพื่อวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

1.3 ขอบเขตการศึกษา

วิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาด *SIQS* เมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก

1.4 วิธีดำเนินการศึกษา

- 1) ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก
- 2) พัฒนาแบบจำลองการระบาด *SIQS* ที่มีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก
- 3) วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง
- 4) ศึกษาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง
- 5) สรุปผลและประเมินผล
- 6) เขียนรายงานและส่งรายงาน

1.5 แผนดำเนินการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ.2561					
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.
1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก	■					
2. พัฒนางานวิจัยแบบจำลองการระบาด <i>SIQS</i> ที่มีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก		■				
3. วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง			■			
4. ศึกษาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง				■		
5. สรุปผลและประเมินผล					■	
6. เขียนรายงานและส่งรายงาน						■

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้แบบจำลองการระบาด *SIQS* ที่มีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก
- 2) ได้เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง
- 3) ได้ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาค้นคว้าเอกสารต่าง ๆ ทั้งทฤษฎี งานวิจัย และสาระความรู้ที่เกี่ยวข้องกับการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

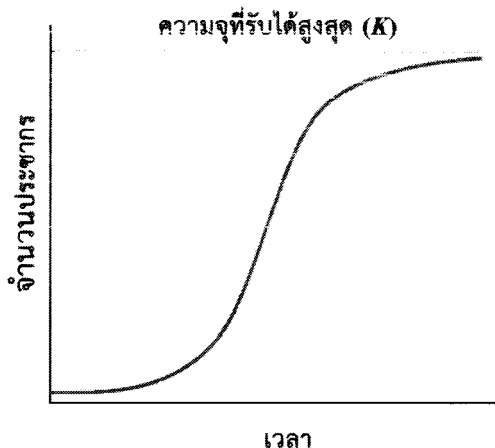
2.1 ความรู้พื้นฐาน

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้พื้นฐาน

2.1.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก

การเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก เป็นการเพิ่มภายใต้ปัจจัยของสภาพแวดล้อม หรือตัวต้านทานในสิ่งแวดล้อมในธรรมชาติปัจจัยที่จำเป็นต่อการดำรงชีวิตมักมีอยู่จำกัด จำนวนสมาชิกในประชากรจึงถูกจำกัดด้วยปัจจัยต่าง ๆ นั้น จนถึงประชากรสูงสุดที่จะมีได้ในแต่ละสภาพแวดล้อมนี้ เรียกว่า ความจุที่รับได้สูงสุด (Carrying Capacity) ใช้สัญลักษณ์ K ระยะแรกของการเพิ่มประชากรจะมีอัตราการเพิ่มค่อนข้างสูง เมื่อถึงจุดหนึ่ง อัตราการเพิ่มเริ่มลดลงเรื่อย ๆ จนถึงระดับคงที่ คือ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเท่ากับระดับความจุที่รับได้สูงสุดเป็นระดับที่สภาพแวดล้อมสามารถเลี้ยงดู ประชากรได้มากที่สุดนั่นเอง กราฟการเพิ่มของประชากรแบบนี้เรียกว่า Logistic Growth Curve มีลักษณะเป็นรูปอักษรเอส (S-Shaped Growth Curve)



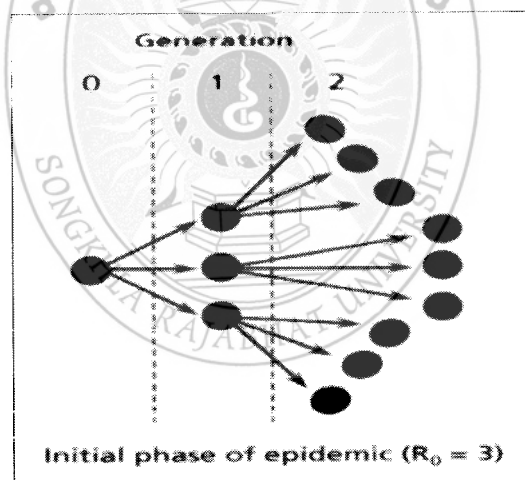
รูปที่ 2.1 กราฟการเพิ่มของประชากรแบบ Logistic Population Growth

การเพิ่มของประชากรแบบ Logistic Growth ในธรรมชาติประชากรไม่ได้คงที่ อยู่ในระดับความจุที่รับได้สูงสุดตลอดเวลา แต่มีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นลดลง (Population Fluctuation) ที่มีรูปแบบแน่นอนเป็นวัฏจักร (Population Cycle) ทั้งนี้เนื่องมาจาก เมื่อประชากรเพิ่มมีสมาชิกเพิ่มขึ้นทำให้หาอาหารและที่อยู่ขาดแคลน ย่อมมีการแก่งแย่งแข่งขัน (Competition) กันในสมาชิกด้วยกัน ตลอดจนมีการสะสมของเสียมากขึ้น จึงทำให้ประชากรลดลง เมื่อมีอาหารเพิ่มขึ้น มีพื้นที่มากขึ้น ประชากรก็กลับมาเพิ่มขึ้น (George B. Johnson, 1997)

2.1.2 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าระดับการติดเชื้อ

เจษฎา เต็นดวงบริพันธ์ (2547) ค่าระดับการติดเชื้อของโรค (Basic reproductive number) เขียนโดยใช้สัญลักษณ์ R_0 หมายถึง จำนวนเฉลี่ยของผู้ติดเชื้อรายใหม่ในประชากรกลุ่มเสี่ยงที่เกิดขึ้นจากผู้ป่วยรายแรกแพร่เชื้อให้

ถ้า $R_0 < 1$ หมายความว่า การติดเชื้อของโรคลดลงหรือไม่มีการติดเชื้อของโรคในบริเวณที่ศึกษา
ถ้า $R_0 > 1$ หมายความว่า การติดเชื้อจะเกิดขึ้นได้เสมอ หรือโรคมีโอกาสมากลับมาติดเชื้ออีกครั้ง



รูปที่ 2.2 แสดงตัวอย่างค่าระดับการติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 3

2.1.3 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์

การแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสามารถทำได้สะดวกยิ่งขึ้นโดยการแปลงระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์มีวิธีดังต่อไปนี้

พรพิศ ยิ้มประยูร (2557) ได้พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.1)$$

กำหนดเมทริกซ์ A, X และ B ดังต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ระบบสมการ (2.2) สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ $AX = B$

เรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient matrix)

เรียกเมทริกซ์ X ว่า เมทริกซ์ตัวแปร (Variable matrix)

เรียกเมทริกซ์ B ว่า เมทริกซ์ค่าคงตัว (Constant matrix)

และเรียกเมทริกซ์ $[A|B]$ ว่า เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented matrix) โดยที่

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad (2.2)$$

ทฤษฎีบท 2.1 (โทมัส จอร์จ, 2548) กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ แล้ว เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A คือ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{adj}(A)$ โดยที่ $\text{adj}(A)$ คือ เมทริกซ์ขนาด n ซึ่งมีสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i และ หลักที่ j เป็นตัวประกอบร่วมเกี่ยว A_{ij} ของ a_{ij}

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = [A_{ij}]^t$$

เช่น ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.1 (ตำราจคทพิทยโยธา, 2558) ให้ f_1, f_2, \dots, f_n เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x_1, x_2, \dots, x_n และอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ มีค่าทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$ และ $j = 1, 2, \dots, n$ จาคอเบียนดีเทอร์มิแนนท์ของ f_1, f_2, \dots, f_n หรือเรียกโดยย่อว่า **จาคอเบียน** ของ f_1, f_2, \dots, f_n เทียบกับตัวแปร x_1, x_2, \dots, x_n โดยดีเทอร์มิแนนท์คือ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจาคอเบียนของ f_1, f_2, \dots, f_n เทียบกับตัวแปร x_1, x_2, \dots, x_n แทนด้วย $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

เมื่อ

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

บทนิยาม 2.2 (อาริสกา ฉัตรกิจจวรรณ, 2542) ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n และ \mathbf{x} เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน \mathbb{R}^n เราจะเรียก \mathbf{x} ว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvector) ของ A ก็ต่อเมื่อ

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

สำหรับบางค่าสเกลาร์ λ

สเกลาร์ λ เรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะของ A (Eigenvalue) นอกจากนี้ \mathbf{x} ยังเรียกได้ว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ λ (Eigenvector corresponding to λ)

บทนิยาม 2.3 (อาริสตา ฉัตรกิจจวรรณ, 2542) ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ค่า $\det(A - \lambda I_n)$ เรียกว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) และสมการ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)

บทนิยาม 2.4 (อังคณา ศรีพิชัย, 2560) ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วเซต $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ จะเรียกว่า สเปกตรัมของ A (Spectrum of A) และเรียก $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}$ ว่า รัศมีสเปกตรัมของ A (Spectral radius of A)

การหารากของ Routh- Hurwitz

Gantmacher (1959, p.213) (อ้างถึงใน อีรวัดน์ จึงสรณ์ศุภชัย, พนมกร ตาลพรรณ และชัย ธนัช ประภัสโรทัย, 2554, น.11) แสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ทำให้รากทั้งหมดของพหุนามมีส่วนจริงเป็นลบดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้สมการพหุนามกำลัง n คือ

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์คือ ค่าคงที่จริง $i = 1, \dots, n$ กำหนด n เมทริกซ์โดยค่าสัมประสิทธิ์ a_i ของลักษณะเฉพาะพหุนาม

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

และ

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a_j = 0$ ถ้า $j > n$ รากทั้งหมดของพหุนาม $\rho(\lambda)$ เป็นจำนวนจริงลบหรือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงลบ ก็ต่อเมื่อตัวกำหนดของเมทริกซ์เฮอริวิตซ์ (Hurwitz) ทั้งหมดเป็นบวก

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$$

เมื่อ $n = 2$ ซึ่งเป็นเฮอริวิตซ์ ที่สามารถหาได้ง่าย คือ $\det H_1 = a_1 > 0$ และ

$$\det H_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

หรือ $a_1 > 0$ และ $a_2 > 0$ สำหรับพหุนามดีกรี $n = 2, 3, 4$ และ 5 สามารถหาได้จากเกณฑ์เฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz) เมื่อ $n = 2 : a_1 > 0$ และ $a_2 > 0$

$$n = 3 : a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ และ } a_1 a_2 > a_3$$

$$n = 4 : a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ และ } a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

$$n = 5 : a_i > 0; i = 1, 2, 3, 4, 5, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4 \text{ และ} \\ (a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$$

2.1.4 การหาค่าระดับการติดเชื่อของแบบจำลองโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป

วิธีรุ่นถัดไปถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Diekmann, Heesterbeek, and Metz (1990) เป็นวิธีทั่วไปในการหา R_0 สำหรับ ตัวแบบที่มีการแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็นหลากหลายลักษณะเช่น ตามเพศ, ตม.เพศ, ตม.ถิ่นที่อยู่ เป็นต้น ขั้นตอนในการหา R_0 ด้วยวิธีนี้ถูกนำเสนอไว้ครั้งแรกในหนังสือของ Diekmann และ Heesterbeek ในปี 2000 และลักษณะสำคัญของงานนี้ ได้ถูกนำมาขยายความต่อ และได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างต่อเนื่องโดยสรุป ในวิธีนี้ R_0 จะถูกคำนวณจาก Spectral radius ของตัวดำเนินการรุ่นถัดไป (next generation operator) ดังนั้น จึงจำเป็นต้องสร้างตัวดำเนินการรุ่นถัดไปสำหรับตัวแบบที่กำลังพิจารณาเสียก่อนซึ่งก็จะพิจารณาจาก กลุ่มของผู้ติดเชื่อและกลุ่มที่ไม่ติดเชื่อ นั่นเอง

สมมติให้ประชากรถูกแบ่งออกเป็น n กลุ่ม โดยกำหนดให้มี m กลุ่มที่เป็นกลุ่มของผู้ติดเชื่อ นิยาม เวกเตอร์ $\bar{x} = x_i, i = 1, \dots, n$ เมื่อ x_i แทนจำนวนหรือสัดส่วนของคนที่อยู่ในกลุ่มที่ i $F_i(\bar{x})$ เป็นอัตราของการเกิดการติดเชื่อใหม่ในกลุ่มที่ i ไม่รวมการส่งผ่านของคนติดเชื่อจากกลุ่มหนึ่งไปยังอีกกลุ่มหนึ่ง

$$\text{ให้ } V_i(\bar{x}) = V_i^-(\bar{x}) - V_i^+(\bar{x})$$

เมื่อ $V_i^+(\bar{x})$ เป็นอัตราของการส่งผ่านของคนไปยังกลุ่ม i

และ $V_i^-(\bar{x})$ เป็นอัตราของการส่งผ่านของคนออกจากกลุ่ม i

จะเห็นได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ x_i เทียบกับเวลา เป็นดังนี้

$$x_i = F_i(\bar{x}) - V_i(\bar{x}) \quad (2.3)$$

และกำหนดให้ X_S เป็นกลุ่มของทุกโรคที่อิสระต่อกัน กล่าวคือ

$$X_S = x \geq 0 \mid x_i = 0, i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

F_i และ V_i จะต้องเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมมติฐาน (A1 - A5) ดังนี้

(A1) ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $F_i, V_i^+, V_i^- \geq 0$ สำหรับ $i = 1, \dots, m$

(A2) ถ้า $x_i = 0$ แล้ว $V_i^- = 0$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x \in X_S$ แล้ว $V_i^- = 0$ สำหรับ $i = 1, \dots, m$

(A3) $F_i = 0$ ถ้า $i > m$ ประชากรที่อิสระจากโรคแล้วประชากรจะยังคงเป็นอิสระจากโรคนั้นคือ ไม่มีการกลับมาติดเชื้ออีก

(A4) ถ้า $x \in X_S$ แล้ว $F_i(x)$ และ $V_i^+(x)$ สำหรับ $i = 1, \dots, m$

(A5) ถ้า $F(x)$ ถูกกำหนดเป็นศูนย์ แล้วค่าลักษณะเฉพาะของ $Df(x_0)$ มีค่าจริงบางส่วนที่ติดลบ สมมติว่า F_i และ V_i สอดคล้องกับสมมติฐานที่กำหนด เราสามารถสร้างเมทริกซ์ (ตัวดำเนินการ) รุ่นถัดไป ในรูปผลคูณ FV^{-1}

$$\text{เมื่อ } F = \left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right] \text{ และ } V = \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_j} \right] \text{ สำหรับ } i, j = 1, \dots, m$$

เมื่อ x_0 แทนจุดสมดุลของระบบ (Disease free equilibrium)

V^{-1} หมายถึง เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ V

FV^{-1} หมายถึง อัตราที่ซึ่งคนที่ติดเชื้อใน x_j ทำให้เกิดผู้ติดเชื้อรายใหม่ใน x_i คุณด้วยระยะเวลาเฉลี่ยของการอยู่ในกลุ่ม j ดังนั้น

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.5)$$

เมื่อ $\rho(FV^{-1})$ ถูกกำหนดให้เป็นรัศมีสเปกตรัม (spectral radius) หรือ พจน์เด่นชัดของค่าลักษณะเฉพาะ (dominant eigenvalue) ของเมทริกซ์ FV^{-1}

หมายเหตุ : การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาด ส่วนใหญ่จะใช้วิธีรุ่นถัดไป เพราะมีความสะดวกและง่ายต่อการคำนวณ ซึ่งในโครงการครั้งนี้จะนำเสนอวิธีการหาค่าระดับการติดเชื้อด้วยวิธีรุ่นถัดไป

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Muhammad et al. (2015) ได้ศึกษาพบว่า อหิวาตกโรคเป็นการติดเชื้อในลำไส้เล็ก โดยมีความเสี่ยงมาจากเชื้อแบคทีเรีย *Vibrio cholerae* (Vibrio cholera) ที่ปนเปื้อนอยู่ในน้ำและอาหาร เชื้อ *Vibrio cholerae* 200 ซีโรกรุ๊ป ซึ่งจะมีความเสี่ยง 01 และ 0139 เท่านั้นที่เป็นเหตุให้เกิด

อหิวาตกโรค เชื้อสาเหตุของโรคคือ vibrio cholerae 01 และ vibrio cholerae 0139 โดยเชื้อจะผ่านและอยู่รอดในน้ำย่อยในกระเพาะอาหาร และเกาะเยื่อเมือกที่เคลือบเยื่อบุผิวลำไส้ อาการหลักคือท้องร่วง และอาเจียน ซึ่งอาจจะส่งผลให้สูญเสียน้ำ และในกรณีที่รุนแรงผิวจะกลายเป็นสีเทา (ซีด) การเกิดโรคส่วนใหญ่เกิดจากการดื่มน้ำหรือรับประทานอาหารที่มีสารปนเปื้อนของผู้ติดเชื้อ รวมไปถึงผู้ที่ไม่มีอาการชัดเจน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์หลายรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบจำลองอหิวาตกโรค ในบทความนี้ นำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอหิวาตกโรคในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ $SIRB$ ประชากรถูกแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ $S(t)$ กลุ่มที่ติดเชื้อ $I(t)$ กลุ่มที่หายจากการติดเชื้อ $R(t)$ โดยเงื่อนไข $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ และกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ยังไม่แสดงอาการ $B(t)$ ในเวลา t แบบจำลองการระบาดของอหิวาตกโรคในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \frac{\beta_b S(t)B(t)}{1 + a_1 B(t)} - \frac{\beta_s S(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_b S(t)B(t)}{1 + a_1 B(t)} + \frac{\beta_s S(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - (\mu_0 + \mu + \phi)I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \phi I(t) - \mu R(t) \\ \frac{dB}{dt} &= \varepsilon I(t) - dB(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่ไม่เป็นลบ และเพื่อความสะดวกจะเขียน $S(t), I(t), R(t)$ และ $B(t)$ เป็น S, I, R และ B ตามลำดับ

$$S = S_0 \geq 0, I = I_0 \geq 0, R = R_0 \geq 0, B = B_0 \geq 0\tag{2.7}$$

เนื่องจากสมการ S, I และ B ในระบบสมการ (2.7) อีกระยะจากตัวแปร R กำหนดสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \frac{\beta_b SB}{1 + a_1 B} - \frac{\beta_s SI}{1 + a_2 I} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_b SB}{1 + a_1 B} + \frac{\beta_s SI}{1 + a_2 I} - (\mu_0 + \mu + \phi)I \\ \frac{dB}{dt} &= \varepsilon I - dB\end{aligned}\tag{2.8}$$

ดังนั้นจากการศึกษาพบว่า มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อีกระยะจากโรค และ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ เมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง ($R_0 < 1$) จุดสมดุลที่อีกระยะจากโรคมีเสถียรภาพ ถ้าค่าระดับการติดเชื้อขั้นพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง ($R_0 > 1$) จุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพ

Herbert, Zhiem, and Shengbing (2002) ได้ศึกษาผลกระทบของการคัดแยกในแบบจำลอง $SIQS$ และ $SIQR$ 6 แบบจำลอง โดยมีอัตราการอุบัติการณ์ 3 แบบดังนี้

1) แบบจำลอง $SIQS$ ที่มีอุบัติการณ์ทั่วไป

จำนวนประชากรทั้งหมด $N(t)$ แบ่งออกเป็นสามส่วนด้วยกัน คือ $N(t) = S(t) + I(t) + Q(t)$ โดยที่ S คือ จำนวนประชากรในกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ I คือ จำนวนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่ถูกกักกันและ Q คือ จำนวนประชากรที่ถูกคัดแยก ระยะเวลาแฝงซึ่งบุคคลนั้นติดเชื้อ แต่ยังไม่ติดเชื้อถูกเพิกเฉยและสันนิษฐานว่าการติดเชื่อนั้นไม่ได้ให้ภูมิคุ้มกัน รุ่นนี้เรียกว่าแบบจำลอง $SIQS$ แบบทั่วไป เนื่องจากเส้นทางปกติหนึ่งเส้นทางผ่าน S ไปยัง I จากนั้นไป Q จากนั้นกลับไป S สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแบบจำลอง $SIQS$ นี้คือ

$$\begin{aligned} S'(t) &= A - \beta SI - dS + \gamma I + \varepsilon Q \\ I'(t) &= [\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha)] I \\ Q'(t) &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha) Q \end{aligned} \quad (2.9)$$

2) แบบจำลอง $SIQS$ ที่มีอุบัติการณ์มาตรฐาน

ตอนนี้พิจารณาแบบจำลอง $SIQS$ ที่มีอุบัติการณ์มาตรฐาน $\beta SI/N$ เปลี่ยนสมการสำหรับแบบจำลอง $SIQS$ คล้ายกับที่แสดงในสมการ (2.10) ยกเว้นอุบัติการณ์การดำเนินการจำนวนมากแบบทั่วไป βSI จะถูกแทนที่ด้วยอุบัติการณ์มาตรฐาน $\beta SI/(S + I + Q)$ ดังนั้นแบบจำลอง $SIQS$ ใหม่คือ

$$\begin{aligned} S'(t) &= A - \beta SI/(S + I + Q) - dS + \gamma I + \varepsilon Q \\ I'(t) &= [\beta S/(S + I + Q) - (\gamma + \delta + d + \alpha)] I \\ Q'(t) &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha) Q \end{aligned} \quad (2.10)$$

3) แบบจำลอง $SIQS$ ที่มีอุบัติการณ์ปรับจากรูปที่ถูกลักกัน

ตอนนี้พิจารณาแบบจำลอง $SIQS$ พร้อมกับอุบัติการณ์ที่ปรับตามการกักกันโรคนีคือ ตัวหาร (N) ในอุบัติการณ์มาตรฐาน $\beta SI/N$ ถูกแทนที่ด้วยประชากรที่ปะปนกัน $N - Q = S + I$ เพื่อให้ได้รับการปรับอัตราการเกิดโรค $\beta SI/(S + I)$ เปลี่ยนสมการสำหรับแบบจำลอง $SIQS$ คล้ายกับที่แสดงในสมการ (2.10) ยกเว้นว่าอุบัติการณ์การดำเนินการจำนวนมากแบบทั่วไป βSI จะถูกแทนที่ด้วย $\beta SI/(S + I)$ ดังนั้นแบบจำลอง $SIQS$ ใหม่คือ

$$\begin{aligned} S'(t) &= A - \beta SI/(S + I) - dS + \gamma I + \varepsilon Q \\ I'(t) &= [\beta S/(S + I) - (\gamma + \delta + d + \alpha)] I \\ Q'(t) &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha) Q \end{aligned} \quad (2.11)$$

4) แบบจำลอง $SIQR$ ที่มีอุบัติการณ์ทั่วไป

สมมติว่าการติดเชื่อนั้นสร้างภูมิคุ้มกันถาวรเพื่อให้ประชากรสามารถย้ายจากกลุ่ม I และ Q ไปยังกลุ่ม R โดยที่ R คือ จำนวนประชากรที่มีภูมิคุ้มกันถาวรและ $N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ ในแบบจำลอง $SIQR$ นี้เข้ามายังกลุ่ม S ไปยังกลุ่ม I จากนั้นตรงไปที่กลุ่ม R หรือกลุ่ม Q จากนั้นไปที่กลุ่ม R สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแบบจำลอง $SIQR$ นี้คือ

$$\begin{aligned} S'(t) &= A - \beta SI - dS \\ I'(t) &= [\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I \\ Q'(t) &= \delta I - (d + \alpha_2 + \varepsilon)Q \\ R'(t) &= \gamma I + \varepsilon Q - dR \end{aligned} \quad (2.12)$$

5) แบบจำลอง $SIQR$ ที่มีอุบัติการณ์มาตรฐาน

เปลี่ยนสมการสำหรับแบบจำลอง $SIQR$ คล้ายกับที่แสดงในสมการ (2.13) ยกเว้นว่าอุบัติการณ์การดำเนินการจำนวนมากแบบทั่วไป βSI จะถูกแทนที่ด้วยอุบัติการณ์มาตรฐาน $\beta SI/N$ เมื่อ $N = S + I + Q + R$ แบบจำลอง $SIQR$ นี้คือ

$$\begin{aligned} S'(t) &= A - \beta SI/N - dS \\ I'(t) &= [\beta S/N - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I \\ Q'(t) &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha_2)Q \\ R'(t) &= \gamma I + \varepsilon Q - dR \end{aligned} \quad (2.13)$$

6) แบบจำลอง $SIQR$ ที่มีอุบัติการณ์ปรับจากที่ถูกกักกัน

เปลี่ยนสมการสำหรับแบบจำลอง $SIQR$ คล้ายกับที่แสดงในสมการ (2.13) ยกเว้นว่าอุบัติการณ์การดำเนินการจำนวนมากแบบทั่วไป βSI จะถูกแทนที่ด้วยอุบัติการณ์ที่ปรับตามการกักกัน $\beta SI/(S + I + R)$ แบบจำลองนี้ใช้แบบจำลอง $SIQR$ ของ Feng และ Thieme ในสองวิธีที่เด่น มีบางคนเดินทางโดยตรงจากกลุ่ม I ถึงกลุ่ม R โดยไม่ต้องผ่านกลุ่มกักกันและรวมถึงการเสียชีวิตที่เกี่ยวข้องกับโรค แบบจำลอง $SIQR$ นี้คือ

$$\begin{aligned} S'(t) &= A - \beta SI/(S + I + R) - dS \\ I'(t) &= [\beta S/(S + I + R) - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I \\ Q'(t) &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha_2)Q \\ R'(t) &= \gamma I + \varepsilon Q - dR \end{aligned} \quad (2.14)$$

ดังนั้นจากการศึกษาแบบจำลอง $SIQS$ และ $SIQR$ พบว่าแบบจำลองส่วนใหญ่ที่มีจุดสมดุลโรคคงอยู่จะมีเสถียรภาพและมี bifurcation หลายชนิดเกิดขึ้นในบางแบบจำลอง

Karam, Adil, and Youssef (2016) ได้ศึกษาแบบจำลองที่อธิบายถึงพลวัตของรูปแบบการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบีที่มีการเติบโตของตับและการตอบสนอง CTL. ไวรัสตับอักเสบบี (HBV) เป็นปัญหาสาธารณสุขทั่วโลกที่มีผู้เสียชีวิตมากกว่า 5 ล้านคนต่อปี โรคที่รุนแรงนี้สามารถติดต่อได้ง่ายผ่านการสัมผัสกับร่างกายที่ติดเชื้อและตัวอย่างเช่น การติดเชื้อมากกว่าเอชไอวี 100 เท่า (human immunodeficiency virus)

ในช่วงสองทศวรรษที่ผ่านมาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จำนวนมากได้รับการพัฒนาเพื่ออธิบายและเข้าใจพลวัตของการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี เมื่อเร็ว ๆ นี้งานบางชิ้นได้ปรับปรุงแบบจำลองก่อนหน้านี้โดยการแทนที่การฉีดเข้าหาเซลล์ตับที่ติดต่อสุขภาพด้วยฟังก์ชันการเติบโตแบบโลจิสติก การเปลี่ยนแปลงนี้เสริมสร้างพลวัตของแบบจำลองการเกิดโรค HBV ในบทความนี้จะพิจารณาการเพิ่มของเซลล์ตับแบบโลจิสติกซึ่งเป็นหน้าที่ของอุบัติการณ์มาตรฐานและจะศึกษาบทบาทของระบบภูมิคุ้มกันของเซลล์ในการควบคุมการจำลองแบบของไวรัส เพื่อจุดประสงค์นี้แบบจำลองที่พิจารณาจะได้รับการกำหนด โดยระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{T_m}\right) - \beta \frac{v(t)x(t)}{T(t)} \\ \frac{dy}{dt} &= \beta \frac{v(t)x(t)}{T(t)} - ay(t) - py(t)z(t) \\ \frac{dv}{dt} &= ky(t) - \mu v \\ \frac{dz}{dt} &= cy(t)z(t) - bz(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

เมื่อ $T(t) = x(t) + y(t)$

ข้อมูลเริ่มต้น คือ $x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0$ และ $z(0) = z_0$

ในแบบจำลองนี้ x, y, v และ z แสดงถึงความเข้มข้นของเซลล์ที่ไม่ได้รับเชื้อเซลล์ที่ติดเชื้อไวรัสอิสระ และเซลล์ Cytotoxic T-Lymphocyte (CTL) ตามลำดับ เซลล์ตับที่ไม่ติดเชื้อจะเติบโตในอัตราที่ขึ้นอยู่กับขนาดของตับ T_m ที่อัตราการแพร่กระจายสูงสุดของประชากรต่อหัว (r) เซลล์ตับที่มีสุขภาพดีจะติดเชื้อไวรัสในอัตรา $\beta \frac{vx}{T}$ เมื่อ β คือ ค่าคงที่ของการเคลื่อนไหว เซลล์ที่ติดเชื่อนั้นตายในอัตรา ay และถูกฆ่าโดยการตอบสนองของ CTL ที่อัตรา pyz ไวรัสอิสระผลิตโดยเซลล์ที่ติดเชื้อในอัตรา ky และการสลายตัวในระบบภูมิคุ้มกันที่อัตรา μv ในที่สุด CTLs ขยายตัวในการตอบสนองต่อแอนติเจนของไวรัสที่มาจากเซลล์ที่ติดเชื้อในอัตรา cyz และการสลายตัวในกรณีที่ไม่มีภาระแอนติเจน ที่อัตรา bz

ในงานวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาแบบจำลองที่มีการเพิ่มของประชากรแบบคงที่ เป็นแบบจำลองที่มีการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก โดยศึกษาอัตราการติดเชื้อของโรคเมื่อเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะมีผลต่ออัตราการติดเชื้อหรือไม่ เพื่อวางแผนรองรับการระบาดต่อไป



บทที่ 3

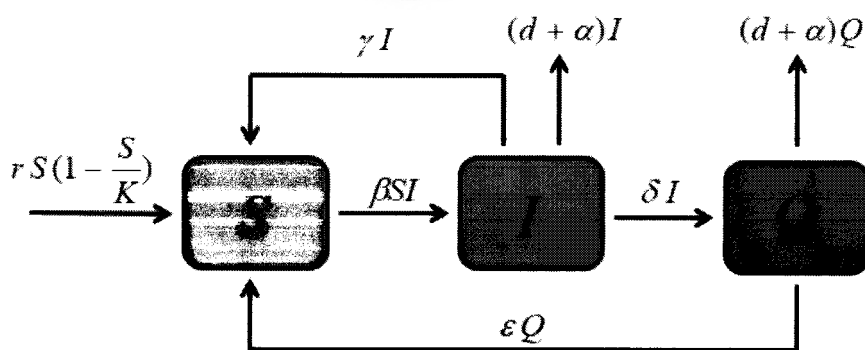
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการจัดทำโครงการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาด $SIQS$ เมื่อมีการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก ผู้จัดทำโครงการวิจัยดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 3.1 การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- 3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง
- 3.3 การวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

3.1 การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดโดยเมื่อมีสถานการณ์การระบาด จะแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้ $S(t)$ แทน ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible individuals) ณ เวลา t , $I(t)$ แทน ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ (Infected individuals) ณ เวลา t และ $Q(t)$ แทน ประชากรติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือกักตัว (Quarantine individuals) ณ เวลา t เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $S(t)$, $I(t)$ และ $Q(t)$ เป็น S , I และ Q ตามลำดับ ดังนั้นประชากรรวม $N = S(t) + I(t) + Q(t)$ การเปลี่ยนแปลงของแต่ละกลุ่มประชากร แสดงในรูปที่ 3.1 พารามิเตอร์และความหมายของแต่ละตัวแปร จะแสดงในตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แบบจำลองการระบาด $SIQS$ เมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก

ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์และความหมายของแต่ละตัวแปร

ตัวแปร	ความหมาย
r	อัตราการเพิ่มของประชากร
K	อัตราขีดความสามารถในการรองรับ (จำนวนประชากร)
β	อัตราการแพร่กระจายของโรค
δ	อัตราการตัดแยกจากการติดเชื้อ
γ	อัตราการฟื้นตัวจากการติดเชื้อ
ε	อัตราการฟื้นตัวจากการติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก
d	อัตราการตายโดยธรรมชาติ
α	อัตราการตายด้วยโรค

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าประชากรกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรแบบโลจิสติก ด้วยอัตรา $rS(1 - \frac{S}{K})$ นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์โลจิสติกและเพิ่มขึ้นจากการฟื้นตัวในกลุ่มที่ติดเชื้อ และกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกด้วยอัตรา γ และ ε ตามลำดับ ในทางกลับกันประชากรกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนลดลงเนื่องจากอัตราการแพร่กระจายของโรคด้วยอัตรา β และสำหรับประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการแพร่กระจายของโรคด้วยอัตรา β และประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อมีจำนวนลดลงเนื่องจากการเสียชีวิตโดยธรรมชาติและจากการเป็นโรคด้วยอัตรา d และ α ตามลำดับ อีกทั้งลดลงจากการฟื้นตัวในกลุ่มที่ติดเชื้อด้วยอัตรา γ รวมถึงอัตราการตัดแยกจากการติดเชื้อด้วยอัตรา δ และสำหรับประชากรกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการตัดแยกจากการติดเชื้อด้วยอัตรา δ และประชากรกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกมีจำนวนลดลงเนื่องจากการเสียชีวิตโดยธรรมชาติและจากการเป็นโรคด้วยอัตรา d และ α ตามลำดับ และ ลดลงจากการฟื้นตัวในกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกด้วยอัตรา ε นอกจากนี้ สมมติฐานการสร้างแบบจำลองเมื่อมีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก คือ ในกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะมีอัตราการเสียชีวิตโดยธรรมชาติ อยู่ในสมการ $rS(1 - \frac{S}{K})$

จากรูปที่ 3.1 และสมมติฐานข้างต้นจะได้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของแบบจำลองการระบาดเมื่อมีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= rS(1 - \frac{S}{K}) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \delta + d + \alpha) I \\
 \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha) Q
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dQ}{dt}$ หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรกลุ่ม S กลุ่ม I และกลุ่ม Q เทียบกับเวลา t ตามลำดับ

3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง

3.2.1 จุดสมดุลของแบบจำลองคณิตศาสตร์

จุดสมดุลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะได้จากการกำหนด $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 0$ จะได้ว่า

$$rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI = 0 \quad (3.2)$$

$$\beta SI - (\gamma + \delta + d + \alpha)I = 0 \quad (3.3)$$

$$\delta I - (\varepsilon + d + \alpha)Q = 0 \quad (3.4)$$

จากสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$(\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha))I = 0 \quad (3.5)$$

จากสมการ (3.4) จะได้

$$Q = \frac{\delta I}{(\varepsilon + d + \alpha)} \quad (3.6)$$

จากสมการ (3.5) พบว่าในการหาจุดสมดุลพิจารณา 2 กรณี คือ $I = 0$ และ $\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha) = 0$

กรณีที่ 1 $I = 0$ จะได้ว่า $S = K, Q = 0$

ดังนั้นจุดสมดุล คือ $E^0 = (S^0, I^0, Q^0) = (K, 0, 0)$

โดยเรียกจุดสมดุล (E^0) นี้ว่า **จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (Disease-free equilibrium)**

กรณีที่ 2 $\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha) = 0$

จะได้ว่า

$$S = \frac{(\gamma + \delta + d + \alpha)}{\beta} \quad (3.7)$$

พิจารณสมการ (3.2)

$$rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI = 0$$

นำสมการ (3.6) แทนในสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) + \gamma I + \varepsilon \left(\frac{\delta I}{(\varepsilon + d + \alpha)}\right) - \beta SI = 0$$

$$I = \frac{\frac{rS^2}{K} \left(\frac{K}{S} - 1 \right) (\varepsilon + d + \alpha)}{\delta d + \delta \alpha + d\varepsilon + d^2 + \alpha d + \alpha\varepsilon + \alpha d + \alpha^2}$$

ดังนั้น จุดสมดุล คือ $E^* = (S^*, I^*, Q^*)$ เมื่อ

$$S^* = \frac{(\gamma + \delta + d + \alpha)}{\beta}$$

$$I^* = \frac{r(S^*)^2 (R_0 - 1) (\varepsilon + d + \alpha)}{K (\delta d + \delta \varepsilon + d\varepsilon + d^2 + 2\alpha d + \alpha\varepsilon + \alpha^2)}$$

$$Q^* = \frac{\delta I^*}{(\varepsilon + d + \alpha)}$$

$$\text{และ } R_0 = \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)}$$

โดยเรียกจุดสมดุล (E^*) ว่า จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (Endemic equilibrium)

ถ้า $R_0 > 1$ จะได้ว่า I^* มีค่าเป็นบวก ซึ่ง R_0 คือ ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน โดยจะกล่าววิธีการหาในหัวข้อถัดไป

3.2.2 ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานโดยวิธีการแทนคิดของเมทริกซ์พื้นฐานถัดไป

(Next generation matrix)

จากสมการ (3.1) สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI \\ \beta SI - (\gamma + \delta + d + \alpha) I \\ \delta I - (\varepsilon + d + \alpha) Q \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

จากสมการ (3.8) จะได้ว่า

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta SI \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V_i = \begin{bmatrix} -rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \gamma I - \varepsilon Q + \beta SI \\ (\gamma + \delta + d + \alpha) I \\ -\delta I + (\varepsilon + d + \alpha) Q \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.9) คือ

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta I & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V = \begin{bmatrix} r \left(\frac{2S}{K} - 1 \right) + \beta I & -\gamma + \beta S & -\varepsilon \\ 0 & (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & -\delta & (\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

แทนค่าจุดสมดุลที่อิสระจากโรค

$$E^0 = (S^0, I^0, Q^0) = (K, 0, 0)$$

ลงในสมการ (3.10) จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} r & \gamma + \beta K & \varepsilon \\ 0 & (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & -\delta & (\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

จากสมการ (3.11) จะได้เมทริกซ์ผกผันของ V ดังนี้

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{(-\gamma + \beta K)(\varepsilon + d + \alpha) + (\delta \varepsilon)}{r(\gamma + \delta + d + \alpha)(\varepsilon + d + \alpha)} & \frac{\varepsilon}{r(\varepsilon + d + \alpha)} \\ 0 & \frac{1}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{(\gamma + \delta + d + \alpha)(\varepsilon + d + \alpha)} & \frac{1}{(\varepsilon + d + \alpha)} \end{bmatrix}$$

นำเมทริกซ์ F คูณ V^{-1} จะได้

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

หาค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.12) ให้ λ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ว่า

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) = \lambda^2 \left(\frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} - \lambda \right) = 0$$

ดังนั้น ค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.12) คือ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ และ $\lambda_3 = \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)}$

$$\begin{aligned} \rho(FV^{-1}) &= \max_{1 \leq i \leq 3} \{|\lambda_i|\} \\ &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \\ &= \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\rho(FV^{-1}) = \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)}$$

ดังนั้น

$$R_0 = \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} \quad (3.13)$$

3.2.3 เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง

จากระบบสมการ (3.1) หาค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ได้ดังนี้
กำหนดให้

$$\begin{aligned} rS(1 - \frac{S}{K}) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI &= y_1 \\ \beta SI - (\gamma + \delta + d + \alpha)I &= y_2 \\ \delta I - (\varepsilon + d + \alpha)Q &= y_3 \end{aligned}$$

ดังนั้น จาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลอง คือ

$$J(E) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial S} & \frac{\partial y_1}{\partial I} & \frac{\partial y_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial y_2}{\partial S} & \frac{\partial y_2}{\partial I} & \frac{\partial y_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial y_3}{\partial S} & \frac{\partial y_3}{\partial I} & \frac{\partial y_3}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$J(E) = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2S}{K}) - \beta I & \gamma - \beta S & \varepsilon \\ \beta I & \beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & \delta & -(\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $R_0 < 1$ แล้วระบบสมการ (3.1) จะมีจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (locally asymptotically stable)

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.14) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) คือ

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -r & \gamma - \beta K & \varepsilon \\ 0 & \beta K - (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & \delta & -(\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3.15) ที่จุดสมดุลที่จุดอิสระจากโรค (E^0) หาได้จาก $\det(J(E^0) - \lambda I) = 0$ จะได้ว่า

$$(-r - \lambda_1)(\beta K - (\gamma + \delta + d + \alpha) - \lambda_2)(-\varepsilon + d + \alpha) - \lambda_3 = 0$$

ดังนั้น $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = (\gamma + \delta + d + \alpha) - \beta R_0 - 1$, $\lambda_3 = -(\varepsilon + d + \alpha)$

จะเห็นได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีค เป็นจำนวนจริงลบ คือ $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ และ $\lambda_2 < 0$ เมื่อ $R_0 < 1$ ดังนั้น จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับถ้า $R_0 < 1$

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $R_0 > 1$ แล้วระบบสมการ (3.1) จะมีจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.14) ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) คือ

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2S^*}{K}) - \beta I^* & \gamma - \beta S^* & \varepsilon \\ \beta I^* & \beta S^* - (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & \delta & -(\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3.16) ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ E^* หาได้จาก $\det(J(E^*) - \lambda I) = 0$ จะได้ว่า

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad a_1 &= (\beta I^* - r) + \frac{2rS^*}{K} + \varepsilon + d + \alpha \\ a_2 &= (\varepsilon + d + \alpha)(\beta I^* - r) + r(\varepsilon + d + \alpha)\frac{2S^*}{K} + \beta I^*(d + \alpha + \delta) \\ a_3 &= \beta I^*\varepsilon d + \beta I^*\varepsilon \alpha + \beta I^*d\delta + \beta I^*d^2 + 2\beta I^*d\alpha + \beta I^*\alpha\delta + \beta I^*\alpha^2 \end{aligned}$$

จากหลักการของเรอูร์ทเฮอริวิตซ์ (Routh Hurwitz Condition) รากของสมการพหุนามกำลังสามจะมีรากที่เป็นจำนวนลบถ้า $a_i > 0, i = 1, 2, 3$ และ $a_1a_2 - a_3 > 0$ จากสมการ (3.17) จะเห็นว่า $a_3 > 0$ และ $a_1, a_2 > 0$ เมื่อ $\beta I^* > r$ และ $R_0 > 1$ และ

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= (\beta I^* - r)^2(\varepsilon + d + \alpha) + (\beta I^* - r)\left(\frac{4\varepsilon rS^*}{K} + \frac{4drS^*}{K} + \frac{4\alpha rS^*}{K} + \varepsilon^2 + d^2 + \alpha^2\right. \\ &\quad \left.+ \beta I^*(d + \alpha + \delta) + 2(\varepsilon d + \varepsilon \alpha + \alpha d)\right) + \left(\frac{2rS^*}{K}\right)^2(\varepsilon + d + \alpha) + \beta I^*\delta\varepsilon \\ &\quad + \frac{2rS^*}{K}(\beta I^*d + \beta I^*\alpha + \beta I^*\delta + \varepsilon^2 + d^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon d + 2\varepsilon\alpha + 2\alpha d) > 0 \end{aligned}$$

เมื่อ $\beta I^* > r$ และ $R_0 > 1$

ดังนั้น จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับเมื่อ $R_0 > 1$

3.3 การวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

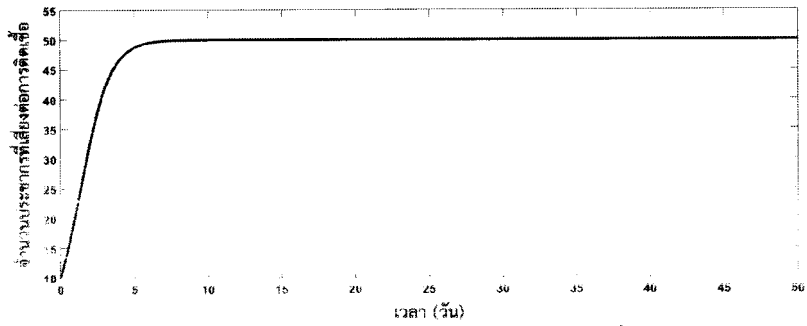
พิจารณาเสถียรภาพของแบบจำลองแต่ละจุดสมดุล โดยการนำค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 3.2 แทนลงในสมการที่ (3.1) โดยเลือกค่า $\beta = 0.0014$ และ $\beta = 0.05$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข $R_0 < 1$ และ $R_0 > 1$

ตารางที่ 3.2 ความหมายและค่าของพารามิเตอร์

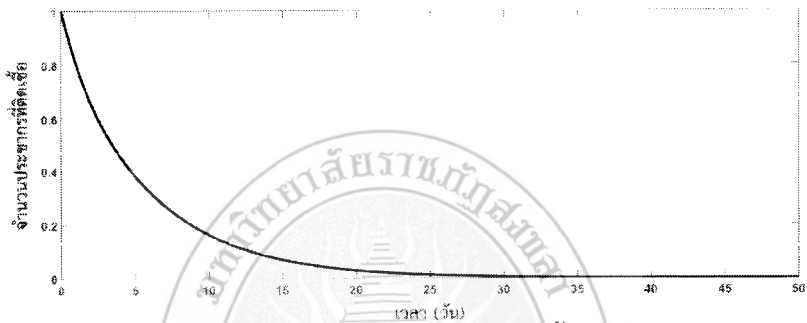
ตัวแปร	ความหมาย	ค่า
r	อัตราการเพิ่มของประชากร	1
K	อัตราขีดความสามารถในการรองรับ (จำนวนประชากร)	50
β	อัตราการแพร่กระจายของโรค	0.0014, 0.05
δ	อัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อ	0.1
γ	อัตราการฟื้นตัวจากการติดเชื้อ	0.03
ε	อัตราการฟื้นตัวจากการติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก	0.2
d	อัตราการตายโดยธรรมชาติ	0.1
α	อัตราการตายด้วยโรค	0.01

3.3.1 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

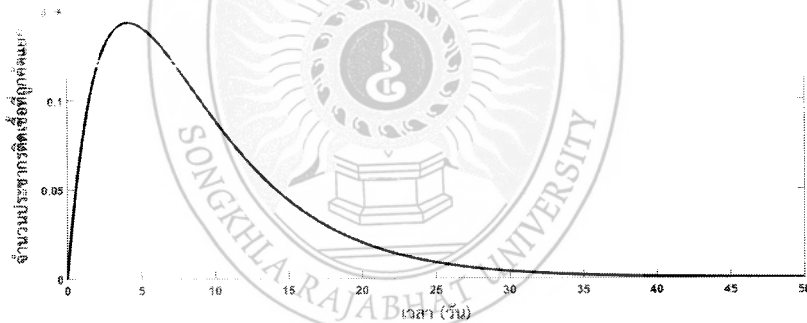
ในกรณี $R_0 < 1$ จะกำหนดให้ $\beta = 0.0014$ ซึ่งจะทำให้ได้ $R_0 = 0.29 < 1$ เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในตารางที่ 3.2 แทนลงในระบบสมการ (3.1) จะได้จุดสมดุลที่อิสระจากโรคคือ $(S^0, I^0, Q^0) = (50, 0, 0)$ และค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลอิสระจากโรคมีค่าเป็นจำนวนจริงลบคือ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.17, \lambda_3 = -0.31$ เมื่อพิจารณาผลเชิงตัวเลขโดยแสดงในรูปแบบกราฟในรูปที่ 3.2 จะเห็นว่า แบบจำลอง (3.1) มีค่าลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค E^0 เมื่อ $R_0 < 1$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งหมายความว่า การระบาดของโรคลดลงหรือไม่มีการแพร่ระบาดของโรคในอาณาบริเวณที่ศึกษา



(a) จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



(b) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ



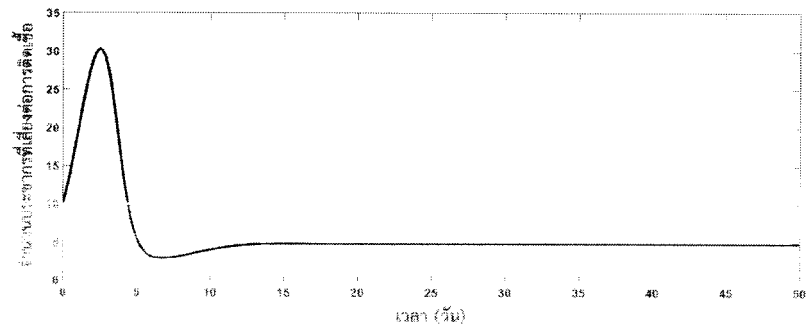
(c) จำนวนประชากรที่ถูกรักษาหาย

รูปที่ 3.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta = 0.0014$ จะได้ $R_0 < 1$

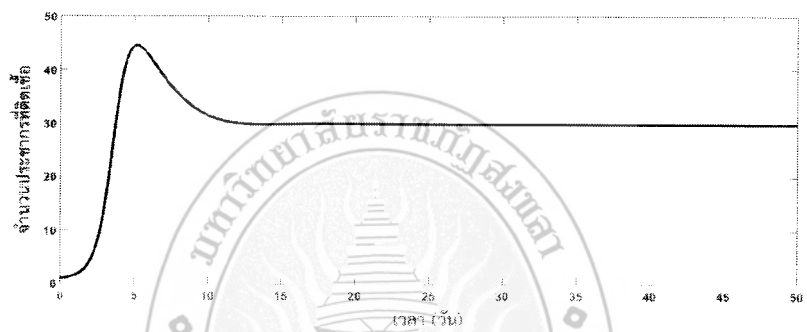
3.3.2 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อมีค่ามากกว่าหนึ่ง

ในกรณี $R_0 > 1$ จะกำหนดให้ $\beta = 0.05$ ซึ่งจะทำให้ได้ $R_0 = 10.42 > 1$ เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 3.2 แทนลงในระบบสมการ (3.1) จะได้จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ คือ $(S^0, I^0, Q^0) = (4.80, 29.83, 9.62)$ และค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ คือ $\lambda_1 = -0.19, \lambda_2 = -0.40 + 0.46i, \lambda_3 = -0.40 - 0.46i$ ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจำนวนจริงลบ และจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นลบ เมื่อคำนวณผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง จะเห็นได้ว่าแบบจำลอง (3.1) จะลู่เข้าสู่จุดที่โรคคงอยู่ ซึ่งผลเชิงตัวเลขที่ได้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.2 แสดงดังรูปที่ 3.3

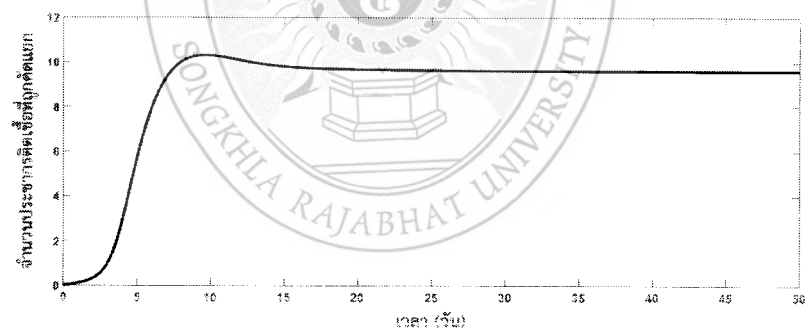
3
DLS
01/10/21



(a) จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



(b) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ



(c) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกคัดแยก

รูปที่ 3.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) เมื่อ $\beta = 0.05$ จะได้ $R_0 > 1$

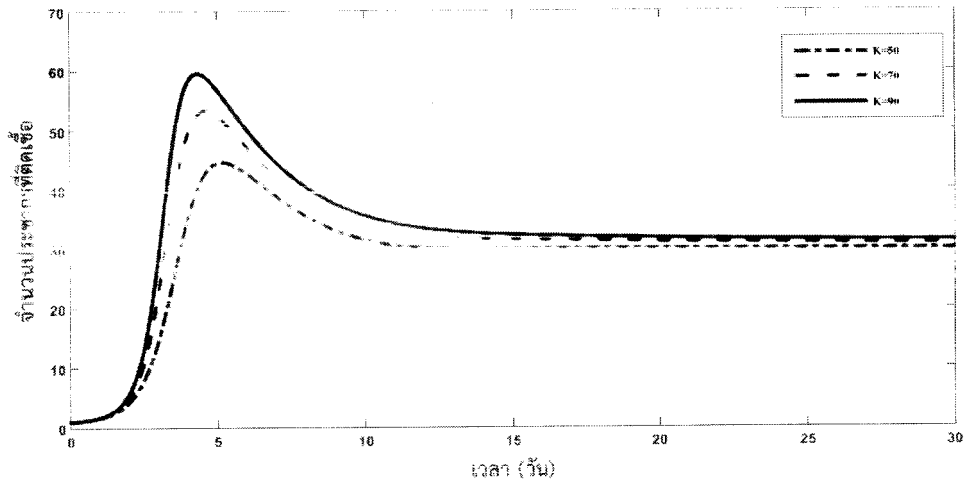
ตารางที่ 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานและอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร

อัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร (K)	ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน (R_0)
50	10.41667
70	14.58333
90	18.7500

จากตารางที่ 3.3 จะเห็นว่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร K จะแปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน กล่าวคือ การเพิ่มอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร ให้กับประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อจะส่งผลต่อการเพิ่มขึ้นของค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน ซึ่งค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานจะแปรผันตรงกับจำนวน ประชากรที่ติดเชื้อ หากค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้ประชากรที่ติดเชื้อเพิ่มขึ้นด้วย เมื่อพิจารณาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (3.1) พบว่าเมื่อวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองและผลเชิงตัวเลขมีความสอดคล้องกันโดยแบบจำลองที่พัฒนาได้มีวิเสถียรภาพเฉพาะเชิงเส้นที่ β ซึ่งสามารถได้เมื่อวิเคราะห์ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 และภาพที่ 3.4 อีกทั้งยังศึกษาพฤติกรรมผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองที่ (3.1) เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรจะเห็นได้ว่า เมื่ออัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรเพิ่มขึ้น ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\frac{\partial R_0}{\partial K} = \frac{\beta}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} > 0$$

การลดอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรด้วยอัตรา K แสดงดังรูปที่ 3.4 จะพบว่า การลดขีดความสามารถในการรองรับประชากรจะช่วยลดประชากรในการติดเชื้อได้



รูปที่ 3.4 แสดงอัตราค่าขีดความสามารถในการรองรับประชากรในกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อในรูปแบบจำลอง แบบเวลาตามค่าพารามิเตอร์ต่อไปนี้ $r = 1$, $K = 50, 70$ และ 90 , $\beta = 0.05$, $\delta = 0.1$, $\gamma = 0.03$, $\varepsilon = 0.2$, $d = 0.1$ และ $\alpha = 0.1$



บทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้ ได้มีการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง SIQS โดยการเปลี่ยนจากอัตราการเพิ่มประชากรแบบคงที่มาเป็นอัตราการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก ซึ่งมีการแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ และสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I) และกลุ่มประชากรติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือตัดแยก (Q) และได้มีการสร้างสมมติฐานเพิ่มเติมให้กับแบบจำลองที่พัฒนาได้และแบบจำลองดังกล่าวสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \delta + d + \alpha) I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha) Q\end{aligned}\tag{4.1}$$

หากระดับการติดเชื้อพื้นฐานของแบบจำลองการระบาดโดยวิธีจุดเกิดโรคจะได้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของสมการ (4.1) คือ

$$R_0 = \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)}$$

เมื่อทำการศึกษาแบบจำลอง (4.1) พบว่า แบบจำลองที่พัฒนาได้เป็นแบบจำลองที่มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค $E^0 = (K, 0, 0)$ และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ $E^* = (S^*, I^*, Q^*)$ ซึ่งจุดสมดุลทั้ง 2 จุดนี้ เป็นจุดสมดุลที่มีความเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขค่าระดับการติดเชื้อ คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพ ถ้า $R_0 < 1$ และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพ ถ้า $R_0 > 1$ โดยผลการวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขซึ่งนำไปตามทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 จากการวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของจุดสมดุลที่โรคคงอยู่จะเห็นได้ว่าเมื่อจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการเป็นโรคจะแปรผันตรงกับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ ซึ่งแสดงว่าเมื่อประชากรที่ติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นก็จะทำให้ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับค่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรโดยจะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มค่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรจะทำให้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานเพิ่มขึ้นและในทางกลับกันเมื่อลดค่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรก็จะทำให้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานลดลง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะเป็นเครื่องมือที่

สำคัญอย่างหนึ่งในการศึกษาการแพร่ระบาดของโรคซึ่งสามารถพยากรณ์ถึงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ และช่วงเวลาของการระบาดและเพื่อกำหนดประชากรที่เหมาะสมหรือสมดุลกับสถานที่นั้น ๆ

ข้อเสนอแนะ

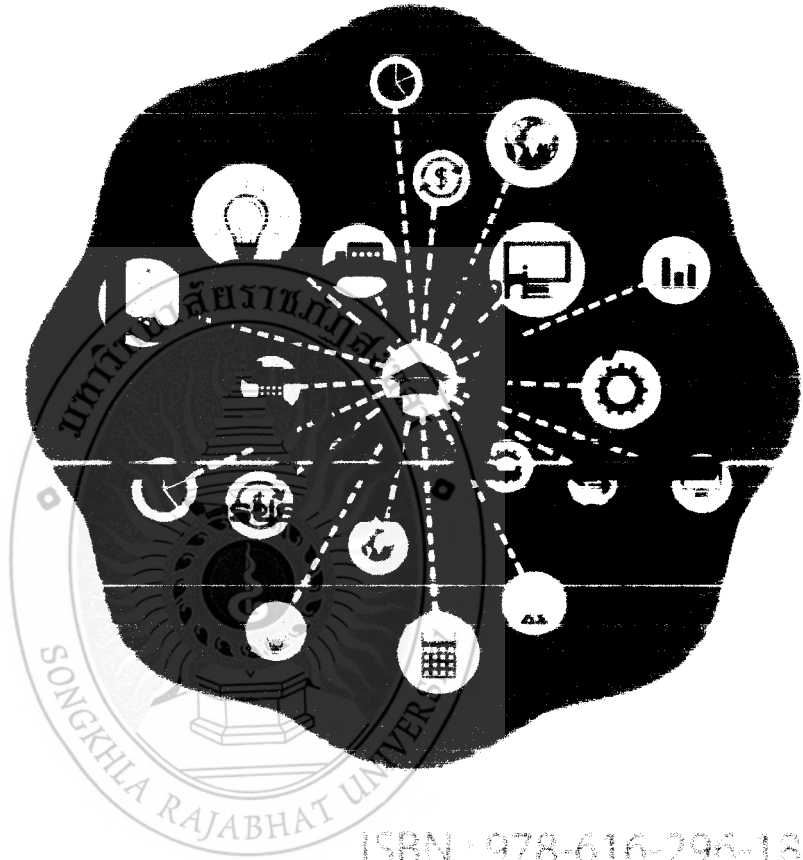
งานวิจัยในครั้งนี้ยังขาดการศึกษา หิน้ำแบบจำลองไปประยุกต์ใช้โรคที่เกิดขึ้นจริง โดยพารามิเตอร์หรือปัจจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับโรคที่ทำการศึกษามาประยุกต์กับแบบจำลองที่พัฒนาได้ ในการนำมาประยุกต์ใช้ควรคำนึงว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบจำลองที่อยู่ภายใต้สมมติฐานซึ่งหลาย ๆ พารามิเตอร์จะไม่มีข้อมูลหรือเป็นข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ของการระบาดของโรค ดังนั้น จึงควรระมัดระวังการแปลผล และนำผลการศึกษาไปใช้งาน







PROCEEDINGS



ISBN : 978-616-296-186-1

20 - 21 มีนาคม 2562

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ



**SWURES12-091 การวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลองการระบาด SIQS
เมื่อมีการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก
STABILITY ANALYSIS OF AN SIQS EPIDEMIC MODEL WITH LOGISTIC
POPULATION GROWTH**

สิทธิพงศ์ ทอสาय *วัชรพงศ์ จินดาพันธ์* *ศิริฉัตร ทิพย์ศรี* *ยติศรดี เด็นเพ็ชรน้อย**
*Sittipong Torsai, Watcharapong Jindaphan, Sirachat Tipsri, Adisak Denphetnong**

*คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
Faculty of Science and Technology, Songkhla Rajabhat University.*

**Corresponding author, E-mail: adisak.de@skru.ac.th*

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาดเมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อ และกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยก ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองนี้มีจุดสมดุล 2 จุดคือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ ผลการวิเคราะห์แบบจำลองโดยใช้ทฤษฎีเสถียรภาพและผลเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเมื่อระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง ในทางกลับกันหากการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่งจุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ นอกจากนี้ยังพบว่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับแปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน นั่นคือหากลดอัตราขีดความสามารถในการรองรับก็จะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อลดลง

คำสำคัญ: แบบจำลองการระบาด เสถียรภาพ ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน การเพิ่มแบบโลจิสติก

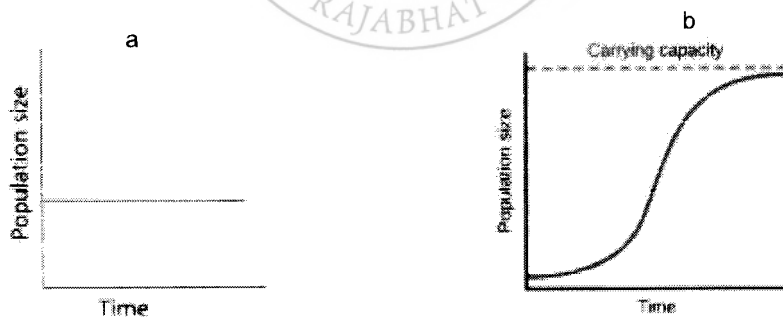
Abstract

This study aims to develop epidemic model with logistic population growth. The population is divided into 3 groups: susceptible, infected and quarantine. The results find that the model exhibits two equilibriums : disease-free and endemic equilibriums. The analysis of the stability theory and numerical simulation indicate that the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when basic reproduction number is less than unity. On the contrary, basic reproduction number is greater than unity, the endemic equilibrium is locally asymptotically stable. Additionally, our findings show that the carrying capacity rate varies as basic reproduction number. Therefore, decreasing carrying capacity rate results in decreased infected.

Keywords: Epidemic Model, Stability, Basic Reproduction Number, Logistic Growth

บทนำ

โรคระบาด (Epidemic) คือ สถานการณ์การติดเชื้อโรคหรือโรคติดเชื้อที่เกิดขึ้นในระยะเวลาเดียวกันในชุมชนหรือในแหล่งหนึ่งแหล่งใดในอัตราสูงกว่าสถานการณ์ปกติที่ควรเป็น โดยการติดเชื่อนั้นลุกลามแพร่กระจายอยู่ในชุมชนหรือในแหล่งนั้น ๆ ที่อยู่ใกล้เคียงจุดเริ่มต้นของโรคและสามารถแพร่กระจายลุกลามไปยังชุมชนอื่น ๆ ที่อยู่ไกล ๆ ออกไปได้หลาย ๆ ชุมชนหรือหลาย ๆ สถานที่ [1] จากปัญหาที่พบในชุมชนมีประชากรที่ติดเชื้อสูงกว่าสถานการณ์ปกติเพราะมีอัตราการประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อสูงขึ้นไปจึงจะต้องมีความสมดุลของจำนวนประชากรในชุมชนนั้นเพื่อเป็นการลดพื้นที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ซึ่งการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อเป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคเพื่อช่วยลดจำนวนประชากรในการติดเชื้อและการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติกเป็นอีกวิธีหนึ่งเช่นกันที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคได้และเมื่อนำการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติกมาเปรียบเทียบกับ การเพิ่มประชากรแบบคงที่ จะเห็นได้ว่าการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติกมีความสมจริงมากกว่าการเพิ่มประชากรแบบคงที่ เพราะการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติกเป็นการเพิ่มที่มีรูปแบบการเพิ่มลักษณะเป็นรูปตัวเอส (S-shape) หรือ กราฟแบบซิกมอยด์ (sigmoidal curve) ซึ่งแบ่งระยะต่างๆ ออกได้เป็น 4 ระยะด้วยกัน คือ ระยะที่ 1 มีการเพิ่มจำนวนประชากรอย่างช้าๆ เนื่องจากเป็นระยะเริ่มต้น จำนวนประชากรมีน้อย และมีอัตราการเกิดสูงกว่าอัตราการตายเพียงเล็กน้อย ระยะที่ 2 มีการเพิ่มจำนวนประชากรอย่างรวดเร็ว เนื่องจากประชากรมีจำนวนมากขึ้น และสามารถปรับตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อมได้ดี มีอัตราการเกิดสูงกว่าอัตราการตายมาก ระยะที่ 3 มีการเพิ่มประชากรช้าลง เนื่องจากมีตัวต้านทานในสิ่งแวดล้อมเข้ามาบีบหนทางในการเพิ่มจำนวนประชากร เช่น แหล่งอาหารและแหล่งที่อยู่อาศัยค่อนข้างจำกัด มีของเสียจากเมแทบอลิซึมมากขึ้น มีการแก่งแย่งแข่งขันของประชากรมากขึ้น เป็นต้น ระยะที่ 4 มีการเพิ่มจำนวนประชากรค่อนข้างคงที่ เป็นช่วงที่ประชากรอยู่ในภาวะสมดุล เนื่องจากประชากรสามารถปรับตัวให้เหมาะสมกับตัวต้านทานในสิ่งแวดล้อมได้ ทำให้มีอัตราการเกิดใกล้เคียงกับอัตราการตาย จำนวนประชากรจึงค่อนข้างคงที่ อาจจะมีเพิ่มขึ้นหรือลดลงบ้างเล็กน้อย (fluctuation) แต่ก็ไม่ทำให้ขนาดประชากรเปลี่ยนแปลงไปมากนัก ถือได้ว่าระยะนี้เป็นระยะที่ขนาดประชากรมีความเหมาะสมกับสภาพแวดล้อมรอบด้าน โดยสภาพแวดล้อมที่สามารถรองรับประชากรได้มากที่สุดนี้ เรียกว่า ค่าขีดความสามารถในการรองรับ (Carrying capacity) [2] แต่การเพิ่มประชากรแบบคงที่เป็นการเพิ่มจำนวนประชากรเท่ากันทุกระยะและเมื่อนำการเพิ่มประชากรทั้ง 2 แบบ มาเปรียบเทียบกับกันจะได้ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 เปรียบเทียบการเข้าประชากรแบบคงที่และแบบโลจิสติก
(a) การเพิ่มประชากรแบบคงที่ (b) การเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก

ที่มา: Rice University. (2018). *Environmental Limits to Population Growth*. Retrieved November 20, 2018, from https://cnx.org/contents/GFy_h8cu@10.12:eeuvGg4a@4/Environmental-Limits-to-Population-Growth [3].

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคโดยส่วนมากจะเป็นแบบจำลองที่มีอัตราการเพิ่มประชากรแบบคงที่ [4-5] ซึ่งได้รับการศึกษาแบบจำลองการระบาดของโรคโดยมีสมมติฐานว่า กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการเพิ่มของประชากรแบบคงที่ อาทิ แบบจำลองการระบาดของ SIRB ของ Muhammad Altaf Khan; et al [4] ได้ศึกษาพบว่า มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ เมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพ ถ้า $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพและแบบจำลองการระบาดของ SIQS และ SIQR ของ Herbert Hethcote et al [5] ได้ศึกษาผลกระทบของการคัดแยกในแบบจำลอง SIQS และ SIQR 6 แบบจำลอง โดยมีอัตราอุบัติการณ์ 3 แบบ พบว่าแบบจำลองส่วนใหญ่ที่มีจุดสมดุลโรคคงอยู่จะมีเสถียรภาพและมี bifurcation หลายชนิด เกิดขึ้นในบางแบบจำลอง สำหรับแบบจำลองการระบาดที่มีการเพิ่มขึ้นของประชากรแบบโลจิสติกได้มีการศึกษาแบบจำลองการระบาดของ Karam Allali [6] ได้ศึกษาแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของไวรัสตับอักเสบบี ด้วยการเพิ่มของเซลล์ตับแบบโลจิสติกและพบว่าเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ใช้การวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขในการพิจารณา

ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคจากแบบจำลองการระบาดที่รู้จักกันในรูปแบบ SIQS ที่มีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบคงที่ [5] มาเป็นแบบจำลองการระบาดในรูปแบบ SIQS โดยมีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก

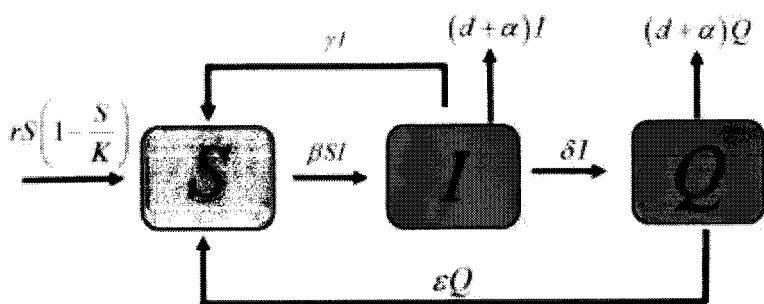
วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาแบบจำลองการระบาดของ SIQS เมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง
3. เพื่อวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

วิธีดำเนินการวิจัย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดโดยเมื่อมีสถานการณ์การระบาดจะแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้ $S(t)$ แทนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible individuals) ณ เวลา t $I(t)$ แทนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (Infected individuals) ณ เวลา t $Q(t)$ แทนประชากรติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Quarantine individuals) ณ เวลา t เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $S(t)$, $I(t)$ และ $Q(t)$ เป็น S , I และ Q ตามลำดับ ดังนั้นประชากรรวม $N = S(t) + I(t) + Q(t)$ การเปลี่ยนแปลงของแต่ละกลุ่มประชากร แสดงในภาพที่ 2 พารามิเตอร์และความหมายของแต่ละตัวแปรจะแสดงในตารางที่ 1



ภาพที่ 2 แบบจำลองการระบาดของ SIQS เมื่อมีการเพิ่มประชากรแบบโลจิสติก

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ ความหมายและค่าของตัวแปร

ตัวแปร	ความหมาย	ค่า	ที่มา
r	อัตราการเพิ่มของประชากร	1	[6]
K	อัตราขีดความสามารถในการรองรับ (จำนวนประชากร)	50	[7]
β	อัตราการแพร่กระจายของโรค	Vary	[4, 6]
δ	อัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อ	0.1	[8]
γ	อัตราการฟื้นตัวจากรอคอยติดเชื้อ	0.03	[4]
ε	อัตราการฟื้นตัวจากการติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก	0.2	[8]
d	อัตราการตายโดยธรรมชาติ	0.1	[4]
α	อัตราการตายด้วยโรค	0.01	[4]

จากภาพที่ 2 จะเห็นว่าประชากรกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรแบบโลจิสติกด้วยอัตรา $rS\left(1-\frac{S}{K}\right)$ นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์โลจิสติกและเพิ่มขึ้นจากการฟื้นตัวในกลุ่มที่ติดเชื้อและกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกด้วยอัตรา γ และ ε ตามลำดับ ในทางกลับกันประชากรกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนลดลงเนื่องจากอัตราการแพร่กระจายของโรคด้วยอัตรา β และสำหรับประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการแพร่กระจายของโรคด้วยอัตรา β และประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อมีจำนวนลดลงเนื่องจากการเสียชีวิตโดยธรรมชาติและจากการเป็นโรคด้วยอัตรา d และ α ตามลำดับอีกทั้งลดลงจากการฟื้นตัวในกลุ่มที่ติดเชื้อด้วยอัตรา γ รวมถึงอัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อด้วยอัตรา δ และสำหรับประชากรกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกมีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อด้วยอัตรา δ และประชากรกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกมีจำนวนลดลงเนื่องจากการเสียชีวิตโดยธรรมชาติและจากการเป็นโรคด้วยอัตรา d และ α ตามลำดับและลดลงจากการฟื้นตัวในกลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยกด้วยอัตรา ε นอกจากนี้สมมติฐานการสร้างแบบจำลองเมื่อมีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก คือ ในกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะมีอัตราการเสียชีวิตโดยธรรมชาติอยู่ในสมการ $rS\left(1-\frac{S}{K}\right)$

จากภาพที่ 2 และสมมติฐานข้างต้นจะได้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของแบบจำลองการระบาดของเมื่อมีอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS\left(1-\frac{S}{K}\right) + \gamma I + \varepsilon Q - \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \delta + d + \alpha)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\varepsilon + d + \alpha)Q \end{aligned} \quad (1)$$

โดยที่ $\frac{dS}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรกลุ่ม S กลุ่ม I และกลุ่ม Q เทียบกับเวลา t ตามลำดับ

วิเคราะห์แบบจำลอง

การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง เป็นการตรวจสอบเสถียรภาพของแบบจำลองก่อนที่จะนำไปพยากรณ์โดยเริ่มต้นจากการหาจุดสมดุล และนำจุดสมดุลที่ได้มาวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์

□ จุดสมดุลของแบบจำลอง

จุดสมดุลของแบบจำลอง (1) จะได้จากการกำหนด $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 0$ เมื่อแก้ระบบสมการจะได้จุด

สมดุล 2 จุดคือ

1. จุดสมดุลที่อิสระจากโรค $E^0 = (S^0, I^0, Q^0) = (K, 0, 0)$
2. จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ $E^* = (S^*, I^*, Q^*)$ เมื่อ

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\gamma + \delta + d + \alpha)}{\beta}, \\ I^* &= \frac{r(S^*)^2(R_0 - 1)(\varepsilon + d + \alpha)}{K(\delta d + \delta \alpha + d\varepsilon + d^2 + 2\alpha d + \alpha\varepsilon + \alpha^2)}, \\ Q^* &= \frac{\delta I^*}{(\varepsilon + d + \alpha)} \end{aligned} \quad (2)$$

และ $R_0 = \frac{\beta K}{(\gamma + \delta + d + \alpha)}$ เรียกว่า ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน (Basic reproduction number)

ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของโรค [9] คือดัชนีวัดจำนวนเฉลี่ยของผู้ติดเชื้อหรือ R_0 ดัชนีสำหรับการแพร่ระบาดจะอิงกับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อครั้งแรกที่มีอยู่ เมื่อสัมพันธ์กันทางสังคมกับประชากรในกลุ่มเสี่ยง ถ้า $R_0 < 1$ หมายความว่า การระบาดของโรคลดลงหรือไม่มีการแพร่ระบาดของโรคในบริเวณที่ศึกษา แต่ถ้า $R_0 > 1$ โรคมีโอกาสกลับมาระบาดอีกครั้งเนื่องจากจำนวนเฉลี่ยของการติดเชื้อต่อหนึ่งจากผู้ป่วยแต่ละคนมีจำนวนเพิ่มขึ้นเพียงพอที่จะทำให้บริเวณที่ศึกษาเกิดการระบาดของโรคอีกครั้ง

ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานจะหาโดยวิธีการแนวคิดของเมทริกซ์รุ่นถัดไป (Next generation matrix) [10] และค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานที่แสดงใน [9] กำหนดให้ $x = (S, I, Q)^T$ สามารถเขียนระบบสมการ (1) ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = F_i - V_i \quad \text{เมื่อ} \quad F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta SI \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_i = \begin{bmatrix} -rS(1 - \frac{S}{K}) - \gamma I - \varepsilon Q + \beta SI \\ (\gamma + \delta + d + \alpha)I \\ -\delta I + (\varepsilon + d + \alpha)Q \end{bmatrix}$$

เมื่อจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค ($DF_x(E^0)$) คือ

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V = \begin{bmatrix} r & -\gamma + \beta K & -\varepsilon \\ 0 & (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & -\delta & (\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน (R_0) คือ $R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta K}{\gamma + \delta + d + \alpha}$ เมื่อ $\rho(FV^{-1})$ ถูกกำหนดให้เป็นรัศมีสเปกตรัม (spectral radius) ของเมทริกซ์ FV^{-1}

□ วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง

จุดสมดุลเป็นจุดเสถียรภาพถ้าค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) (แทนด้วย λ) ของจาโคเบียนเมทริกซ์ของระบบสมการ (1)

$$J(E) = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2S}{K}) - \beta I & \gamma - \beta S & \varepsilon \\ \beta I & \beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha) & 0 \\ 0 & \delta & (\varepsilon + d + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ที่จุดสมดุล (E) เป็นจำนวนจริงลบ หรือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นลบ ดังนั้นเสถียรภาพของจุดสมดุลของแบบจำลองพิจารณาดังนี้

1. ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค E^0 คือ

$$\lambda_1 = -r, \lambda_2 = (\gamma + \delta + d + \alpha)(R_0 - 1), \lambda_3 = -(\varepsilon + d + \alpha)$$

จะได้ว่า $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ และ $\lambda_2 = (\gamma + \delta + d + \alpha)(R_0 - 1) < 0$ เมื่อ $R_0 < 1$ ดังนั้นจุดสมดุลที่อิสระจากโรค E^0 เป็นจุดที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับถ้า $R_0 < 1$ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $R_0 < 1$ แล้วจุดสมดุลที่อิสระจากโรค E^0 เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (locally asymptotically stable)

2. ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3) ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ E^* คือ

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (4)$$

$$\text{เมื่อ } a_1 = (\beta I^* - r) + \frac{2rS^*}{K} + \varepsilon + d + \alpha,$$

$$a_2 = (\varepsilon + d + \alpha)(\beta I^* - r) + r(\varepsilon + d + \alpha) \frac{2S^*}{K} + \beta I^*(d + \alpha + \delta),$$

$$a_3 = \beta I^* \varepsilon d + \beta I^* \varepsilon \alpha + \beta I^* d \delta + \beta I^* d^2 + 2\beta I^* d \alpha + \beta I^* \alpha \delta + \beta I^* \alpha^2$$

จากหลักการของเรย์ทซ์ฮอร์วิทซ์ [11] รากของสมการพหุนามกำลังสามจะมีรากที่เป็นจำนวนลบถ้า

$a_i > 0, i=1,2,3$ และ $a_1 a_2 - a_3 > 0$ จากสมการ (4) จะเห็นว่า $a_3 > 0$ และ $a_1, a_2 > 0$ เมื่อ $\beta I^* > r$ และ $R_0 > 1$ และ

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= (\beta I^* - r)^2 (\varepsilon + d + \alpha) + (\beta I^* - r) \left(\frac{4\varepsilon r S^*}{K} + \frac{4dr S^*}{K} + \frac{4\alpha r S^*}{K} + \beta I^* d + \beta I^* \alpha + \beta I^* \delta + \varepsilon^2 \right. \\ &\quad \left. + d^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon d + 2\varepsilon \alpha + 2\alpha d \right) + \left(\frac{2r S^*}{K} \right)^2 (\varepsilon + d + \alpha) + \frac{2r S^*}{K} (\beta I^* d + \beta I^* \alpha + \beta I^* \delta + \varepsilon^2 \\ &\quad \left. + d^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon d + 2\varepsilon \alpha + 2\alpha d \right) + \beta I^* \delta \varepsilon > 0 \text{ เมื่อ } \beta I^* > r \text{ และ } R_0 > 1 \end{aligned}$$

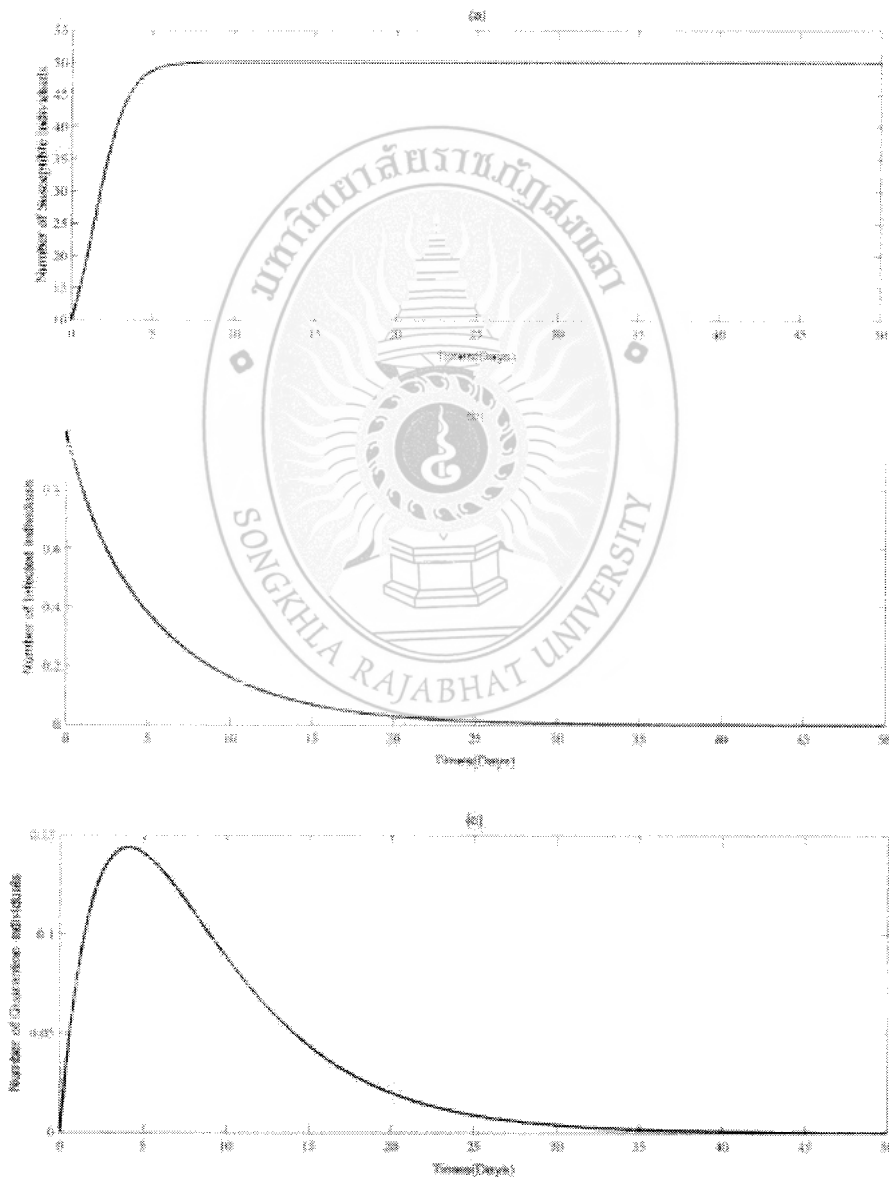
ดังนั้นจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ E^* เป็นจุดที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับเมื่อ $R_0 > 1$ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $R_0 > 1$ แล้วจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ E^* เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

ผลการวิจัย

การวิเคราะห์แบบจำลอง (1) โดยการใช้ MATLAB คำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของระบบสมการ (1) ร่วมกับค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในตารางที่ 1 และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S(0) = 10, I(0) = 1, Q(0) = 0$ โดยเริ่มต้นตรงจุด E^* แบบจำลอง (1) เป็นแบบจำลองที่มีเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขของการระบาดที่เรขาคณิต ซึ่งพื้นฐานโดยเปลี่ยนแปลงอัตราการแพร่กระจายของโรค β เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข $R_0 < 1$ และ $R_0 > 1$

ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ($R_0 < 1$)

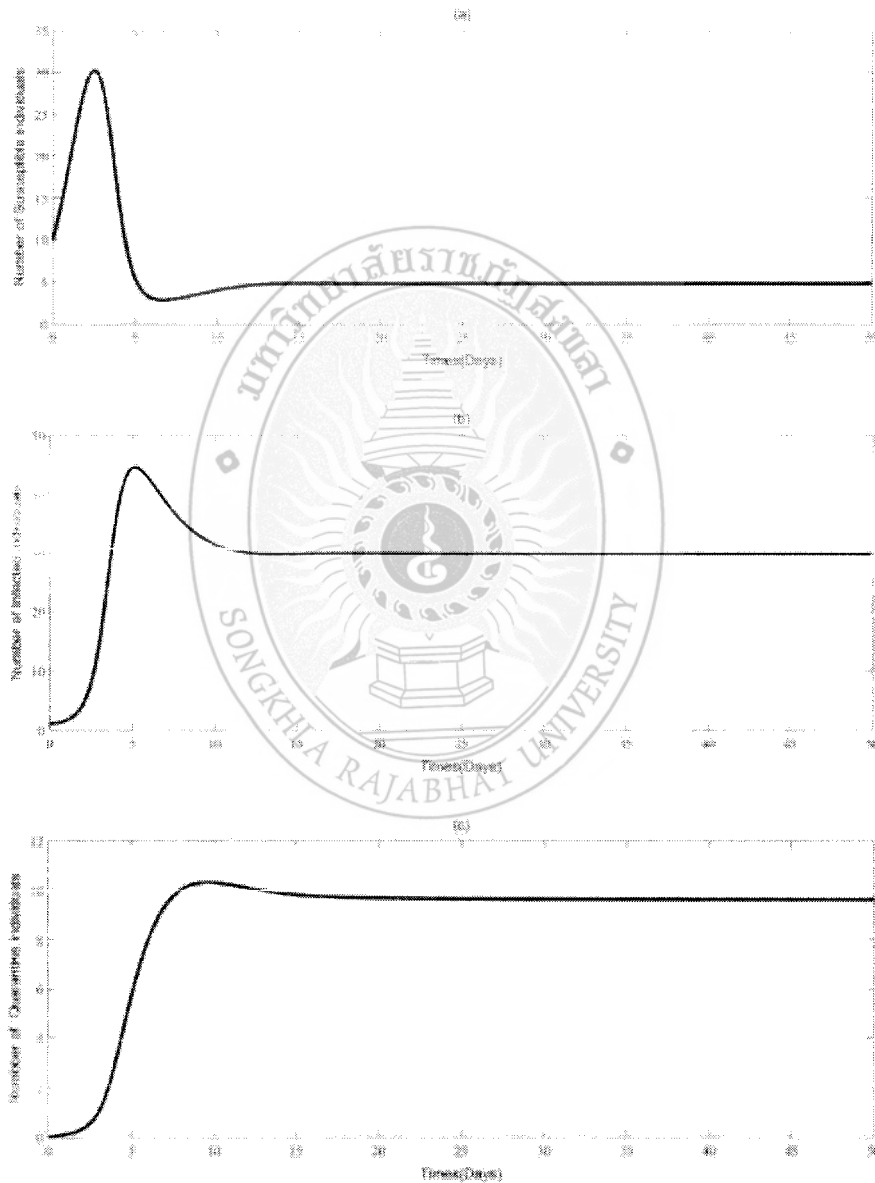


ภาพที่ 3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (1) เมื่อ $\beta = 0.0014$ จะได้ $R_0 < 1$

(a) จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (b) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ (c) จำนวนประชากรที่ถูกคัดแยก

ในกรณี $R_0 < 1$ จะกำหนดให้ $\beta = 0.0014$ ซึ่งจะทำให้ได้ $R_0 = 0.29 < 1$ เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในตารางที่ 1 แทนลงในระบบสมการ (1) จะได้จุดสมดุลที่อิสระจากโรคคือ $(S^0, I^0, Q^0) = (50, 0, 0)$ และค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลอิสระจากโรคมีค่าเป็นจำนวนจริงลบคือ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -0.17, \lambda_3 = -0.31$ เมื่อพิจารณาผลเชิงตัวเลขโดยแสดงในรูปแบบกราฟในภาพที่ 3 จะเห็นว่า แบบจำลอง (1) มีค่าลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค E^0 เมื่อ $R_0 < 1$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 1 ซึ่งหมายความว่า การระบาดของโรคลดลงหรือไม่มี การแพร่ระบาดของโรคในอณาบริเวณที่ศึกษา

ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อมีค่ามากกว่าหนึ่ง ($R_0 > 1$)



ภาพที่ 4 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (1) เมื่อ $\beta = 0.05$ จะได้ $R_0 > 1$
(a) จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (b) จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ (c) จำนวนประชากรที่ถูกคัดแยก

ในกรณี $R_0 > 1$ จะกำหนดให้ $\beta = 0.05$ ซึ่งจะทำให้ได้ $R_0 = 10.42 > 1$ เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 1 แทนลงในระบบสมการ (1) จะได้จุดสมดุลที่โรคคงอยู่คือ $(S^*, I^*, Q^*) = (4.80, 29.83, 9.62)$ และค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่คือ $\lambda_1 = -0.19$ และ λ_2, λ_3 คือ $-0.4 \pm 0.46i$ ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจำนวนจริงลบและจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นลบ เมื่อคำนวณผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง จะเห็นได้ว่าแบบจำลอง (1) จะเข้าสู่จุดที่โรคคงอยู่ซึ่งผลเชิงตัวเลขที่ได้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 2 แสดงดังภาพที่ 4

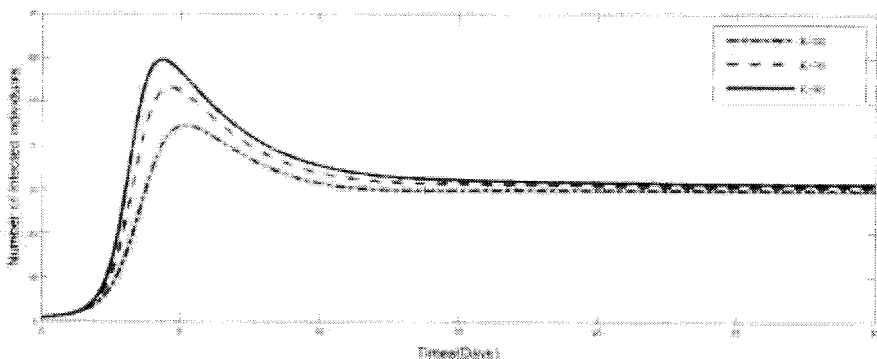
ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานและอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร

อัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร (K)	ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน (R_0)
50	10.41667
70	14.58333
90	18.75000

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากร K จะแปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน กล่าวคือ การเพิ่มอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรให้กับประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อจะส่งผลต่อการเพิ่มขึ้นของค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน ซึ่งค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานจะแปรผันตรงกับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ หากค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ประชากรที่ติดเชื้อเพิ่มขึ้นด้วย เมื่อพิจารณาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง (1) พบว่าเมื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของคณิตศาสตร์ของแบบจำลองและผลเชิงตัวเลขมีคุณสมบัติคล้ายกันโดยแบบจำลองที่พัฒนาได้มีภาวะเสถียรภาวะเฉพาะเชิงเส้นที่กำกับภายใต้เงื่อนไขการติดเชื้อพื้นฐาน ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎี 1 และ 2 และภาพที่ 5 อีกทั้งยังศึกษาพฤติกรรมผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองที่ (1) เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรจะเห็นได้ว่า เมื่ออัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรเพิ่มขึ้น ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\frac{\partial R_0}{\partial K} = \frac{\beta}{(\gamma + \delta + d + \alpha)} > 0$$

การลดอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรด้วยอัตรา K แสดงดังภาพที่ 5 จะพบว่าการลดขีดความสามารถในการรองรับประชากรจะช่วยลดประชากรในการติดเชื้อได้



ภาพที่ 5 แสดงอัตราค่าขีดความสามารถในการรองรับประชากรในกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อในรูแบบจำลองแบบเวลาตามค่าพารามิเตอร์ต่อไปนี้ $r = 1, K = 50, 70$ และ $90, \beta = 0.05, \delta = 0.1, \gamma = 0.03, \varepsilon = 0.2, d = 0.1$ และ $\alpha = 0.01$

อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยในครั้งนี้ได้พัฒนาแบบจำลองอย่างง่ายที่รู้จักกันในรูปแบบจำลอง SIQS โดยการเปลี่ยนจากอัตราเพิ่มประชากรแบบคงที่มาเป็นอัตราการเพิ่มของประชากรแบบโลจิสติก ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองที่พัฒนาได้เป็นแบบจำลองที่มีความเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน โดยผลการวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 1 และ 2 จากการวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของจุดสมดุลที่โรคคงอยู่จะเห็นได้ว่าเมื่อจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการเป็นโรครวมแปรผันตรงกับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ ซึ่งแสดงว่าเมื่อประชากรที่ติดเชื้อมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นก็จะทำให้ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับค่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรโดยจะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มค่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรจะทำให้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานเพิ่มขึ้นและในทางกลับกันเมื่อลดค่าอัตราขีดความสามารถในการรองรับประชากรก็จะทำให้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานลดลง

สรุปผลการวิจัย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะเป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างหนึ่งในการศึกษาการแพร่ระบาดของโรค ซึ่งสามารถพยากรณ์ถึงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและช่วงเวลาของการระบาดและเพื่อกำหนดประชากรที่เหมาะสมหรือสมดุลกับสถานที่นั้นๆ รวมถึงสามารถควบคุมการระบาดของโรคด้วยวิธีการตัดแยกเพื่อลดพื้นที่เสี่ยงต่อประชากรที่ติดเชื้อจากพื้นที่ที่มีการระบาดของโรคไปยังอีกที่หนึ่งได้ แต่งานวิจัยในครั้งนี้ยังขาดการศึกษาที่นำแบบจำลองไปประยุกต์ใช้โรคที่เกิดขึ้นจริง โดยการนำพารามิเตอร์หรือปัจจัยต่างๆ ที่เกี่ยวกับโรคที่ทำการศึกษามาประยุกต์กับแบบจำลองที่พัฒนาได้ ในการนำมาประยุกต์ใช้ควรคำนึงว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบจำลองที่อยู่ภายใต้สมมติฐานซึ่งหลายๆ พารามิเตอร์จะไม่มีข้อมูลหรือเป็นข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ของการระบาดของโรค ดังนั้น จึงควรระมัดระวังการแปลผล และนำผลการศึกษาไปใช้งาน

เอกสารอ้างอิง

- [1] พวงทอง ไกรพิบูลย์. (2015). โรคระบาด (*Epidemic*). สืบค้นเมื่อ 20 พฤศจิกายน 2561, จาก <http://haamor.com/th/โรคระบาด/>
- [2] กุ๊กภัทร แก้วยอดจันทร์. (2018). รูปแบบการเพิ่มของประชากร. สืบค้นเมื่อ 20 พฤศจิกายน 2561, จาก <https://bit.ly/2Kye7cA>
- [3] Rice University. (2018). *Environmental Limits to Population Growth*. Retrieved November 20, 2018, from https://cnx.org/contents/GFy_h8cu@10.12:eeuvGg4a@4/Environmental-Limits-to-Population-Growth
- [4] Muhammad Altaf Khan, et al. (2015). Dynamical Behavior of Cholera Epidemic Model with Non-linear Incidence Rate. *Applied Mathematical Sciences*. 2015(9): 989-1002.
- [5] Herbert Iltis et al. (2002, January). Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. *Mathematical Biosciences*. 180(2002): 141-160.
- [6] Karam Allali. (2016). Dynamics of a Hepatitis B Viral Infection Model with Logistic Hepatocyte Growth and Cytotoxic T-Lymphocyte Response. *Nonlinear Analysis and Differential Equations*. 4(2016): 109-120.

- [7] Perrin S. Meyer, Jason W. Yung; & Jesse H. Ausubel. (1999). A Primer on Logistic Growth and Substitution: The Mathematics of the Loglet Lab Software. *Technological Forecasting and Social Change*. 61(3): 247-271.
- [8] Yanni Pang; Yuecai Han; & Wenjin Li. (2014). The threshold of a stochastic SIQS epidemic model. *Advances in Difference Equations*. 2014: 320.
- [9] Anderson R M & May R M (1991). *Infectious diseases of humans*. London: Oxford University Press.
- [10] Diekmann; et al. (1990). On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous population. *J. Math. Biol.* 28: 355-382.
- [11] ยติศักดิ์ เต็มเพชรหนอง; มาริษา สนวนิม; และ จิรนนท์ คุ่มเคี่ยม. (2560). แบบจำลองการระบาดที่เกี่ยวข้องกับการฉีดวัคซีนและการคัดแยก. *วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา*. 22(ฉบับพิเศษ): 354-365.



เอกสารอ้างอิง

- เจษฎา เต็มดวงบริพันธ์. (2547). บทเรียนจากซาร์ส. *วารสารวิจัยวิทยาศาสตร์(Section T)*, 3(1), 49-60.
- ดำรงศักดิ์ พิพย์โยธิน. (2558). *แคลคูลัส ๖*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- โทมัส จอร์จ. (2548). *แคลคูลัส*. กรุงเทพฯ: เพียร์สัน, อีดีดูเคชัน, อินโดไชน่า.
- ธีรวัฒน์ จีงสรรคส์กุชัย, พนมกร ตาลพรรณิ และชัยธวัช ประภัสโรทัย. (2554). *พลวัตของตัวแบบธุรกิจของแคลดอร์-คาแลคกีที่มีดีเลย์*. (โครงการคณิตศาสตร์ระดับปริญญาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ). สืบค้นจาก <https://vdocuments.site/dynamics-ofthe-kaldor-kalecki-business-model-with-time-delay.html>
- พรพิศ ยี่มประยูร. (2557). *พีชคณิตเชิงเส้น*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- พวงทอง ไกรพิบูลย์. (2558). *โรคระบาด*. สืบค้น 20 พฤศจิกายน 2561, จาก <http://haamor.com/th/โรคระบาด>
- ภูภัทร แก้วยอดจันทร์. (2561). *รูปแบบการเพิ่มของประชากร*. สืบค้นเมื่อ 20 พฤศจิกายน 2561, จาก <https://bit.ly/2Kye7cA>
- ถาริสา ฉัตรกิจจรรณ (2542). *พีชคณิตเชิงเส้น*. สงขลา: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
- กิ่งคน ศรีพิภพ. (2560). *บทที่ 3: บรรทัดฐาน, เมทริกซ์ และค่าของเมทริกซ์*. สืบค้นเมื่อ 6 สิงหาคม 2561, จาก www.maths.sci.ku.ac.th/angka/01417268/chapterin-eigenvalue.pdf
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Metz, J. A. J. (1990). On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 Inmodles for infectious diseases in heterogeneous population. *J.Math. Biol.*, 28(1990), 355-382.
- George B. Johnson. (1997). *Living environment*. Retrieved from <http://e-book.ram.edu/e-book/c/CU474/chapter11.pdf>
- Herbert, T., Zhien, M., & Shengbing, L. (2002). Effects of quarantine in six endemic models for Infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, 180(2002), 141-160.
- Karam, A., Adil, M., & Youssef, T. (2016). Dynamics of a Hepatitis B Viral Infection Model with Logistic He Hepatocyte Growth and Cytotoxic T-Lymphocyte Response. *Nonlinear Analysis and Dierential Equations*, 4(2016), 109-120.
- Muhammad, A. K., Ahmad, A., Dennis, L. C. C., Islam, S., Khan, I., Ullah, M., & Gul, T. (2015). Dynamical Behavior of Cholrea Epidemic Model with Non-linear Incidence Rate. *Applied Mathematical Sciences*, 9(2015), 989-1002.