รายงานวิจัย

แบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

Epidemic model of Quarantine with transport-related infection

ณัฐธนาภรณ์ รักษ์เกลี้ยง
สมฤทัย หอมวงศ์

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
2561

ใบรับรองงานวิจัย
มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ชื่อเรื่องงานวิจัย แบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง
Epidemic model of Quarantine with transport-related infection

ชื่อผู้ทำงานวิจัย ณัฐธนาภรณ์ รักษ์เกลี้ยง และ สมฤทัย หอมวงศ์

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัย

....อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหนอง)

....ประธานกรรมการสอบ
(อาจารย์ ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี)

....กรรมการสอบ
(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

....กรรมการสอบ
(อาจารย์ศรัณยา เฮงสวัสดิ์)

....ประธานหลักสูตร
(อาจารย์สานิตย์ ฤทธิเดช)

....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุมัติ เดชนะ)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เมื่อวันที่ - 1 พ.ค. 2562

ชื่อเรื่อง	แบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง
ชื่อผู้ทำงานวิจัย	ณัฐธนาภรณ์ รักษ์เกลี้ยง รหัสนักศึกษา 584254005 สมฤทัย หอมวงศ์ รหัสนักศึกษา 584254028
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหน่อง
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สถาบัน	มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา
ปีการศึกษา	2561

บทคัดย่อ

การเดินทางเป็นปัจจัยสำคัญอย่างหนึ่งที่สำคัญต่อการระบาดของโรค งานวิจัยครั้งนี้ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อ ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางระหว่างเมืองสองเมือง โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่มคือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก และกลุ่มที่หายจากการติดเชื้อ แบบจำลองนี้มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคและจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ นอกจากนี้ยังศึกษาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน โดยวิธีเมทริกซ์รุ่นถัดไป และพบว่าจุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง ในทางกลับกันหากค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

คำสำคัญ: การติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง แบบจำลองการระบาด *SIQR* เสถียรภาพ ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน

Project Title	Epidemic model of Quarantine with transport-related infection
Authors	Nattanapron Rakkeang Student ID 584254005 Somruthai Homwong Student ID 584254028
Advisor	Lect. Adisak Denphedtnong
Bachelor of Science	Program in Mathematics
Institute	Songkhla Rajabhat University
Academic Year	2561

ABSTRACT

Transportation among cities is considered as one of the main factors which affect the outbreak of diseases. This research aims to study the mathematical models of quarantine with transport-related infection between two cities. The population is divided into 4 groups: susceptible, infected, quarantined and recovered. The model exhibits two equilibriums: disease-free and endemic equilibriums. Furthermore, the basic reproduction number is obtained by using the next generation matrix. The result indicates that disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when its corresponding reproduction number is less then unity. On the contrary, basic reproduction number is greater than unity, the endemic equilibrium is locally asymptotically stable.

Keywords: Transport-related infection, *SIQR* epidemic model, Stability, Basic reproduction number

คำนำ

รายงานการศึกษาโครงงานทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาวิชา 4574902 โครงงานคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา ผู้จัดทำมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาแบบจำลองของ Nirwani Nidhi, Badshah และ Khandelwal โดยได้ศึกษาแบบจำลองการระบาด *SIQR* ที่ไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง โดยพัฒนาเป็นแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง และคำนวณผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองด้วย

ผู้จัดทำ ขอขอบพระคุณ อาจารย์อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหน๋อง (อาจารย์ที่ปรึกษา) ผู้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และช่วยเหลือในการทำโครงงานครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

ณัฐธนาภรณ์ รักษ์เกลี้ยง และ สมฤทัย หอมวงศ์
18 มีนาคม 2561

กิตติกรรมประกาศ

การดำเนินโครงงานแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทั้งนี้เพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้ทรงความรู้หลาย ๆ ท่าน โดยเฉพาะอาจารย์อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหน่อง อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำ และให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ และขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.ศิรฉัตร ทิพย์ศรี ที่คอยให้คำแนะนำในการใช้โปรแกรม Latex จนกระทั่งโครงงานนี้เสร็จสมบูรณ์ ขอบคุณพี่ ๆ และเพื่อน ๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกคนที่ให้คำแนะนำ และให้กำลังใจกันมาตลอด

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ ที่คอยดูแลและให้โอกาสทางการศึกษา และเป็นกำลังใจสำคัญที่สุดที่ทำให้โครงงานฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

ณัฐธนาภรณ์ รักษ์เกลี้ยง และ สมฤทัย หอมวงศ์

18 มีนาคม 2561

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบันมีโรคระบาดเกิดขึ้นมากมายและมีการลุกลามอย่างรวดเร็ว ทุกครั้งที่เกิดการระบาดของโรคมักไม่มีสัญญาณเตือนล่วงหน้าและไม่สามารถคาดเดาถึงขอบเขตการกระบาดได้ ปัจจัยเสี่ยงที่ทำให้มีการระบาดของโรค คือ การเพิ่มขึ้นของประชากรและการขยายตัวของเขตนาคร การเดินทางข้ามประเทศเป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้เกิดการระบาดของโรค ส่งผลให้โรคแพร่กระจายเป็นบริเวณกว้าง องค์การการท่องเที่ยวสากล ระบุว่าแต่ละปีมีคนเดินทางระหว่างประเทศกว่า 1,000 ล้านคน ซึ่งหมายความว่าเชื้อโรคมีโอกาสถ่ายทอดจากประเทศหนึ่งไปยังอีกประเทศหนึ่งได้อย่างง่ายดาย เช่น การระบาดของโรคซาร์สเมื่อปี ค.ศ. 2003 ที่ทำให้มีผู้ติดเชื้อกว่า 8,000 คน ในกว่า 30 ประเทศทั่วโลก และเชื้อไวรัสซิก้า ที่มีรายงานผู้ติดเชื้อมากกว่า 84 ประเทศเมื่อปี พ.ศ.2559 (ทรงพจน์ สุภาผล, 2561) ปัจจุบันไม่มีการตรวจคัดกรองในเรื่องโรคติดเชื้อ แต่ในขณะมีโรคระบาด และมีผู้สัมผัสโรค อาจมีการแยกผู้สัมผัสโรคให้อยู่ในสถานที่เฉพาะ จนกว่าจะผ่านระยะฟักตัวของโรค ที่เรียกว่า การกักกันโรคหรือคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อ (Quarantine) (พวงทอง ไกรพิบูลย์, 2556) เพื่อเป็นการป้องกันการแพร่กระจายของโรค การควบคุมการระบาดของโรคเป็นสิ่งสำคัญในการป้องกันไม่ให้มีการระบาดของโรคออกไปอย่างกว้างขวาง เพื่อเป็นการลดพื้นที่เสี่ยงจากการติดเชื้อ ซึ่งการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรค เป็นอีกหนึ่งวิธีที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคได้ เนื่องจากสามารถพยากรณ์จำนวนผู้ติดเชื้อและช่วงเวลาของการระบาด

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคเริ่มคิดค้นตั้งแต่ปี 1927 โดย Kermach and Mckendrick (1927) และหลังจากนั้นมีการพัฒนาแบบจำลองการระบาดเรื่อยมา แบบจำลองการระบาดที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางมีผู้พัฒนามาอย่างต่อเนื่อง Cui, Takeuchi, and Yasuhisa (2005) ได้สร้างแบบจำลองการระบาด *SIS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางโดยแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อและกลุ่มติดเชื้อ โดยประชากร 2 กลุ่มนี้มีการเดินทางระหว่างเมือง Wan and Cui (2007) ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาด *SEIS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดิน โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่อยู่ในระยะฟักตัว Liu, Takeuchi, and Cui (2007) ได้สร้างแบบจำลองการระบาด *SIQS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่มีการคัดแยกประชากรที่มีการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อ Adisak, Settapat, and Wirawan (2013) ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาด *SEIRS*

ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อ Nirwani, Badshah, and Khandelwal (2016) ได้ศึกษาแบบจำลองการระบาด *SIQR* พบว่า $R_0 < 1$จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E_0) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ และ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ

งานวิจัยในครั้งนี้ได้พัฒนาแบบจำลองของ Nirwani Nidhi, Badshah และ Khandelwal โดยได้ศึกษาแบบจำลองการระบาด *SIQR* ที่ไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง โดยพัฒนาเป็นแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง รวมถึงวิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง และคำนวณผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

1.2 จุดประสงค์

1) พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

2) วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

3) คำนวณผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาพลวัตร (Dynamic) ของแบบจำลอง

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1) แบบจำลองที่มีการเดินทางระหว่างเมือง 2 เมือง

2) กลุ่มของประชากรออกมี 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มติดเชื้อ (I) กลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยก (Q) และ กลุ่มที่หายจากการติดเชื้อ (R)

1.4 วิธีดำเนินการศึกษา

1) ศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องการออกแบบโครงสร้างจำลองของโรคระบาด *SIQR*

2) ศึกษาวิจัยเรื่องโรคต่าง ๆ ให้เข้าใจ

3) ศึกษาวิจัยและทำความเข้าใจโครงสร้างนั้นแล้วนำมาสร้างเป็นโครงสร้างแบบจำลองขึ้นใหม่เป็น *SIQR* ที่มีการเดินทางระหว่างเมือง

4) ศึกษาผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

5) สรุปผลและอภิปรายผล

6) เขียนรายงานและส่งเล่มรายงาน

7) นำเสนอโครงงานวิจัยทางคณิตศาสตร์

1.5 แผนดำเนินการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ.2561							
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1. ศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องการออกแบบโครงสร้างจำลองของโรคระบาด *SIQR*	■							
2. ศึกษาวิจัยเรื่องโรคต่างๆ ให้เข้าใจ		■	■					
3. ศึกษาวิจัยและทำความเข้าใจโครงสร้างนั้นแล้วนำมาสร้างเป็นโครงสร้างแบบจำลองขึ้นใหม่เป็น *SIQR* ที่มีการเดินทางระหว่างเมือง			■	■	■			
4. ศึกษาผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์				■	■			
5. สรุปผลและอภิปรายผล						■	■	
6. เขียนรายงานและส่งเล่มรายงาน							■	
7. นำเสนอโครงงานคณิตศาสตร์								■

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

2) ได้วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

3) ได้คำนวณผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาพลวัตร (Dynamic) ของแบบจำลอง

บทที่ 2

เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในครั้งนี้ เราจะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาสร้างแบบจำลองโรคระบาด และวิเคราะห์เสถียรภาพของแบบจำลอง เพื่อนำแบบจำลองมาใช้ในการควบคุมการแพร่ระบาดของโรค และพยากรณ์โรคระบาด ซึ่งในการศึกษาค้นคว้าเพื่อดำเนินการให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ ผู้ศึกษาได้ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

2.1 ความรู้เกี่ยวกับโรคระบาด

2.2 ความรู้เกี่ยวกับค่าระดับการติดเชื้อ

2.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาดโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป

2.4 จาโคเบียน

2.5 ระบบสมการเชิงเส้น และทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้เกี่ยวกับโรคระบาด

พวงทอง ไกรพิบูลย์ (2556) ได้ให้ความหมายของโรคระบาด และการรักษาของโรคระบาดไว้ดังนี้

2.1.1 ความหมายของโรคระบาด

โรคระบาด (Epidemic) หมายถึง การเกิดขึ้นของโรคโดยมีความถี่ของการเกิดที่ผิดปกติไป ในประชากรกลุ่มหนึ่ง เป็นโรคที่ระบาดออกไปในวงกว้าง อาจเป็นหลายประเทศหรือทั่วภูมิภาคก็ได้ โรคที่มีการระบาด เช่น โรคทางเดินหายใจเฉียบพลัน (ซาร์ส) โรคไข้หวัดใหญ่ โรคมือเท้าปาก และโรคอีสุกอีใส เป็นต้น ซึ่งเป็นโรคที่เกิดการระบาดได้ง่ายและรวดเร็ว โดยโรคระบาดเหล่านี้จะแพร่กระจายจากการอยู่อาศัยอยู่รวมกันกับผู้ป่วย เป็นการแพร่เชื้อผ่านละอองเล็ก ๆ โดยการหายใจเอาเชื้อไวรัสที่กระจายอยู่ในละอองเสมหะน้ำมูกของผู้ป่วยโดยการไอจาม หรือพูดคุย ซึ่งเป็นสาเหตุสำคัญของการติดเชื้อ

ดังนั้นจึงต้องมีการควบคุมดูแลประชากรไม่ให้ติดเชื้อเพิ่มขึ้นโดยการคัดแยกผู้ป่วยหรือกลุ่มของผู้ที่เชื่อว่าติดเชื้อ เพื่อป้องกันการแพร่กระจายของโรค วิธีการคัดแยกผู้ป่วยส่วนใหญ่ผู้ป่วยจะถูกแยกที่โรงพยาบาล อย่างไรก็ดีสามารถแยกผู้ป่วยไว้ที่บ้าน หรือชุมชนที่ถูกกำหนดไว้ และการการคัดแยกส่วนใหญ่เป็นการคัดแยกโดยการสมัครใจแต่ก็มีกฎหมายใช้บังคับ

2.1.1 การรักษาโรคระบาด

การรักษาโรคระบาดประกอบด้วยการรักษาตามสาเหตุ และ การรักษาประคับประคองตามอาการ

1) การรักษาตามสาเหตุ คือ การรักษาตามชนิดของเชื้อโรค เช่น

• การให้ยาปฏิชีวนะ เมื่อโรคเกิดจาก แบคทีเรีย ซึ่งยาปฏิชีวนะมีหลากหลายชนิด การเลือกใช้ยาจึงต้องเหมาะสมกับชนิดของแบคทีเรียนั้น ๆ ดังนั้น การใช้ยาปฏิชีวนะจึงจำเป็นต้องได้รับคำแนะนำจาก แพทย์ เภสัชกร และพยาบาลเสมอ เพราะการซื้อยากินเอง มักทำให้เกิดเชื้อดื้อยา และอาจส่งผลให้โรคไม่หายจากการใช้ยาไม่เหมาะสมกับโรค ทั้งชนิดของยา ปริมาณยา และระยะเวลาที่ต้องได้รับยา

• การใช้ยาต้านไวรัส เมื่อโรคเกิดจากไวรัสชนิดที่มียาต้านไวรัสชนิดนั้น ทั้งนี้เพราะโดยทั่วไปร่างกายจะสร้างภูมิคุ้มกันต้านทานโรคขึ้นมากำจัดไวรัสเอง การรักษาการติดเชื้อไวรัสโดยทั่วไปจึงเป็นการรักษาแบบประคับประคองตามอาการ (ไม่สามารถใช้ยาปฏิชีวนะได้ เพราะยาปฏิชีวนะฆ่าไวรัสไม่ได้ และไม่สามารถใช้ยาต้านไวรัสได้กับทุกชนิดของไวรัส) โดยทั่วไปถึงแม้จะมียาต้านไวรัส แพทย์จะเลือกใช้เฉพาะในกรณีโรครุณแรง หรือเมื่อเป็นการติดเชื้อของผู้ที่มีภูมิคุ้มกันต้านทานโรคต่ำ หรือที่เรียกว่า กลุ่มเสี่ยง เช่น การใช้ยาโอเซลทามิเวียร์ (Oseltamivir) ในโรคไข้หวัดใหญ่ 2009 เป็นต้น

• การใช้ยาฆ่าเชื้อรา เมื่อเกิดโรคจากการติดเชื้อรา ซึ่งยาฆ่าเชื้อรามีหลายชนิดเช่นกันขึ้นกับว่าเป็นการติดเชื้อราชนิดใด เช่น การใช้คีโตโคนาโซล (Ketoconazole) ในโรคเชื้อราในช่องคลอด เป็นต้น

• การใช้ยา ฆ่าสัตว์เซลล์เดียว ใช้เมื่อโรคเกิดจากสัตว์เซลล์เดียว ซึ่งยาจะมีหลายชนิด ขึ้นกับว่าเป็นการติดเชื้อสัตว์เซลล์เดียวชนิใด เช่น ยา Chloroquine ในการรักษาโรคไข้จับสั่น หรือ ยา Metronidazole ในการรักษาโรคบิดมีตัว เป็นต้น

2) การใช้ยาประคับประคองตามอาการ คือ ให้การรักษาประคับประคองตามอาการของผู้ป่วย เช่น

• การใช้ยาพาราเซตามอลเพื่อลดไข้ หรือลดอาการปวดศีรษะ ปวดเมื้อยเนื้อตัวเมื่อมีไข้

• การพักผ่อนให้เพียงพอ

• การดื่มน้ำมาก ๆ เพื่อป้องกันภาวะเสียน้ำจากมีไข้ อาเจียน หรือ จากท้องเสีย

• การกินอาหารอ่อน เพื่อให้กระเพาะอาหารย่อยอาหารได้ง่ายในภาวะร่างกายเจ็บป่วย

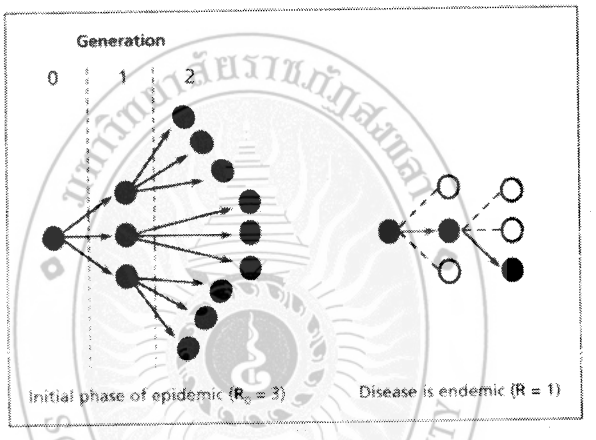
• การให้สารอาหารทางหลอดเลือดดำ เมื่อขาดน้ำมาก

2.2 ความรู้เกี่ยวกับค่าระดับการติดเชื้อ

ในทางระบาดวิทยาค่าระดับการติดเชื้อของโรค (Basic reproductive number) (เจษฎา เด็นดวงบริพันธ์, 2547) แทนด้วย สัญลักษณ์ R_0 หมายถึง จำนวนเฉลี่ยของผู้ติดเชื้อรายใหม่ในประชากรกลุ่มเสี่ยง ที่เกิดขึ้นจากผู้ป่วยรายแรกแพร่เชื้อให้

ถ้า $R_0 < 1$ หมายความว่าการระบาดของโรคลดลง หรือไม่มีการระบาดของโรคในบริเวณที่ศึกษา

ถ้า $R_0 > 1$ หมายความว่าการระบาดจะเกิดขึ้นได้เสมอ หรือโรคมีโอกาศกลับมาระบาดอีกครั้ง



รูปที่ 2.1 แสดงตัวอย่างค่าระดับการติดเชื้อที่มีค่าเท่ากับ 3

2.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาดโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป

วิธีรุ่นถัดไปถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Diekmann, Heesterbeek, and Metz. (1990) เป็นวิธีทั่วไปในการหา R_0 สำหรับตัวแบบที่มีการแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็นหลายลักษณะ เช่น ตามอายุ ตามเพศ ตามถิ่นที่อยู่ เป็นต้น ขั้นตอนการหา R_0 ด้วยวิธีนี้ถูกกล่าวไว้อย่างละเอียดในงานของ Diekmann และ Heesterbeek ในปี 2000 และลักษณะสำคัญของงานนี้ได้ถูกนำมาขยายความต่อและได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างต่อเนื่องโดยสรุป ในวิธีนี้ R_0 จะถูกคำนวณจาก Spectral radius ของตัวดำเนินการรุ่นถัดไป (next generation operator) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องสร้างตัวดำเนินการรุ่นถัดไป สำหรับตัวแบบที่กำลังพิจารณาเสียก่อน ซึ่งก็จะพิจารณาจากกลุ่มของผู้ติดเชื้อและกลุ่มที่ไม่ติดเชื้อ นั่งเอง

สมมติให้ประชากรถูกแบ่งเป็น n กลุ่ม โดยกำหนดให้มี m กลุ่ม ที่เป็นกลุ่มผู้ติดเชื้อ นิยามเวกเตอร์ $\bar{x} = x_i, i = 1, \ldots, n$ เมื่อ x_i แทนจำนวนหรือสัดส่วนของคนที่อยู่ในกลุ่ม i

ให้ $F_i(\bar{x})$ เป็นอัตราของการเกิดการติดเชื้อใหม่ในกลุ่มที่ i ไม่รวมการส่งผ่านของคนที่ติดเชื้อ

จากกลุ่มหนึ่งไปยังกลุ่มหนึ่ง

ให้ $V_i(\bar{x}) = V_i^-(\bar{x}) - V_i^+(\bar{x})$

เมื่อ $V_i^+(\bar{x})$ เป็นอัตราของการส่งผ่านของคนไปยังกลุ่ม i

และ $V_i^-(\bar{x})$ เป็นอัตราของการส่งผ่านของคนออกจากกลุ่ม i

จะเห็นได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ x_i เทียบกับเวลา เป็นดังนี้

$$x_i = F_i(\bar{x}) - V_i(\bar{x})$$

และกำหนดให้ X_s เป็นกลุ่มของทุกโรคที่อิสระต่อกัน กล่าวคือ

$$X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, ..., m\}$$

F_i และ V_i จะต้องเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมมติฐาน $(A1 - A5)$ ดังนี้

(A1) ถ้า $x_i \geq 0$ แล้ว $F_i, V_i^+, V_i^- \geq 0$ สำหรับ $i = 1, ..., n$

(A2) ถ้า $x_i = 0$ แล้ว $V_i^- = 0$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x \epsilon X_s$ แล้ว $V_i^- = 0$ สำหรับ $i = 1, ..., m$

(A2) $F_i = 0$ ถ้า $i > m$ ประชากรที่อิสระจากโรคแล้วประชากรจะยังคงเป็นอิสระจากโรค นั่นคือ ไม่มีการกลับมาติดเชื้ออีก

(A4) ถ้า $x \epsilon X_s$ แล้ว $F_i x = 0$ และ $V_i^+ \bar{x} = 0$ สำหรับ $i = 1, ..., m$

(A5) ถ้า $F(x)$ ถูกกำหนดเป็นศูนย์ แล้วค่าเจาะจงของ $Df(x_0)$ มีค่าจริงบางส่วนที่ติดลบ

สมมติว่า F_i และ V_i สอดคล้องกับสมมติฐานที่กำหนด เราสามารถสร้างเมทริกซ์ (ตัวดำเนินการ) รุ่นถัดไปในรูปผลคูณ FV^{-1}

เมื่อ

$F = [\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_i}]$ และ $V = [\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_i}]$ สำหรับ $i, j = 1, ..., m$

เมื่อ x_0 แทนจุดสมดุลอิระจากโรค (Disease -free equilibrium)

V^{-1} หมายถึง เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ V

FV^{-1} หมายถึง อัตรที่ซึ่งคนที่ติดเชื้อใน x_j ทำให้เกิดผู้ติดเชื้อรายใหม่ใน x_i คูณด้วยระยะเวลาเฉลี่ยของการอยู่ในกลุ่ม j ดังนั้น

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

เมื่อ $\rho(FV^{-1})$ ถูกกำหนดให้เป็นรัศมีสเปกตรัม (spectral radius) หรือ พจน์เด่นชัดของค่าลักษณะเฉพาะ (dominant eigenvalue) ของเมทริกซ์ FV^{-1}

หมายเหตุ : การหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองการระบาด ส่วนใหญ่จะใช้วิธีรุ่นถัดไป เพราะมีความสะดวกและง่ายต่อการคำนวณ ซึ่งในบทความนี้นำเสนอการหาค่าระดับการติดเชื้อด้วยวิธีรุ่นถัดไป

2.4 จาโคเบียน (Jacobian)

บทนิยาม 2.1 (ดำรงค์ ทิพย์โยธา, 2551) ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังชันก์ของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ มีค่าทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ จาโคเบียนดีเทอร์มิแนนท์ ของ f_1, $f_2, \ldots, f_n$ หรือเรียกโดยย่อว่า **จาโคเบียน** ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เทียบกับตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$
โดยที่ ดีเทอร์มิแนนท์ คือ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจาโคเบียน ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เทียบกับตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนด้วย $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

เมื่อ
$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

2.5 ระบบสมการเชิงเส้น และทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์

อาริสา ฉัตรกิจวรุณ (2542) ได้พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

โดยที่ a_{ij}, b_i เป็นสเกลาร์ ; $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$

ระบบสมการ m สมการ n ตัวแปร เขียนในรูปเมทริกซ์ $A\mathbf{x} = B$ ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A นี้จะเรียกว่า **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** (coefficient matrix) ของระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n และ $\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน $\mathbb{R}^n$ เราจะเรียก $\mathbf{x}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvector) ของ A ก็ต่อเมื่อ

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

สำหรับบางค่าสเกลาร์ λ

สเกลาร์ λ เรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะของ A (Eigenvalue) นอกจากนี้ $\mathbf{x}$ ยังเรียกได้ว่า เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ λ (Eigenvector corresponding to λ)

บทนิยาม 2.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ค่า $\det(A - \lambda I_n)$ เรียกว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) และสมการ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Kermach and Mckendrick (1927) เป็นบุคคลที่เริ่มคิดค้นแบบจำลองการระบาดและสร้างแบบจำลองที่มีชื่อ แบบจำลอง *SIR* มีการแบ่งประชากรออกเป็นสามกลุ่ม คือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ และกลุ่มที่หายจากการเป็นโรค โดยประชากรที่ศึกษาสมมติให้มีอัตราคงที่ กล่าวคือ ประชากรไม่มีการเกิด ไม่มีการเสียชีวิตตามธรรมชาติ และเสียชีวิตจากการเป็นโรค รวมถึงไม่มีการย้ายถิ่นฐาน

Cui et al. (2005) ได้สร้างแบบจำลองการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ในรูปแบบ *SIS* ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dS_1}{dt} = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - bS_1 + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_1 + I_1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1+I_1} - (c+d+\alpha)I_1 + \alpha I_2 + \frac{\gamma\alpha S_2 I_2}{S_1+I_1} \\
\frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2+I_2} - bS_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma\alpha S_1 I_1}{S_1+I_1} \\
\frac{dI_2}{dt} &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2+I_2} - (c+d+\alpha)I_2 + \alpha I_1 + \frac{\gamma\alpha S_1 I_1}{S_1+I_1}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ให้ S_i และ I_i แทนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ และประชากรที่ติดเชื้อในเมือง i $(i = 1, 2)$ โดยพารามิเตอร์ต่างๆมีความหมายดังนี้ a หมายถึง อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน d หมายถึง อัตราการฟื้นตัวของประชากรที่ติดเชื้อ α หมายถึง อัตราการเดินทางออกจากเมือง และ c หมายถึง อัตราการตายด้วยโรครวมทั้งการตายตามธรรมชาติของประชากรที่ติดเชื้อ โดยที่ $c > b$ ในสมการ (2.3) โรคจะส่งผ่านด้วยอัตราอุบัติการณ์ (นั่นคืออัตราผู้ติดเชื้อรายใหม่) $\frac{\beta S_j I_j}{S_j + I_j}$ ภายในเมือง j $(j = 1, 2)$ อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมืองเป็นค่าคงที่ β และ α คืออัตราการเดินทางออกจากเมือง เมื่อประชากรในเมือง j เดินทางไปยังเมือง i โรคจะถูกส่งด้วยอัตราอุบัติการณ์ $\frac{\gamma\alpha S_j I_j}{S_j + I_j}$ เมื่อ γ คืออัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง Cui , Takeuchi และ Yasuhisa ได้กำหนดค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของแบบจำลอง คือ

$$R_0 = \frac{\beta}{c+d}, \qquad R_{0\gamma} = R_0 + \frac{\gamma\alpha}{c+d} = \frac{\beta + \gamma\alpha}{c+d} \tag{2.2}$$

จากสมการ (2.4) $R_{0\gamma}$ คือค่าระดับการติดเชื้อขั้นพื้นฐานของ (2.3) และ R_0 คือ ค่าระดับการติดเชื้อขั้นพื้นฐานสำหรับประชากรที่ไม่มีการเดินทางระหว่างสองเมือง (เมื่อ $\gamma = 0$) จะเห็นได้ว่าเมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดเสถียรภาพ ในทางกลับกัน เมื่อ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจุดเสถียรภาพ ในทำนองเดียวกันเมื่อประชากรมีการเดินทางระหว่างเมือง $(\gamma \neq 0)$ $R_{0\gamma} < 1$ ทำให้จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดเสถียรภาพ และเมื่อ $R_{0\gamma} > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่จะเป็นจุดเสถียรภาพ

Wan and Cui (2007) ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาด $SEIS$ ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่อยู่ในระยะฟักตัว ซึ่งเขียนสมการให้อยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1+I_1+E_1} + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma\alpha S_2 I_2}{S_2+I_2+E_2} \\
\frac{dE_1}{dt} &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1+I_1+E_1} - (b+c)E_1 - \alpha E_1 + \alpha E_2 + \frac{\gamma\alpha S_2 I_2}{S_2+I_2+E_2} \\
\frac{dI_1}{dt} &= cE_1 - dI_1 - \alpha I_1 + \alpha I_2 - eI_1 \\
\frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2+I_2+E_2} + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma\alpha S_1 I_1}{S_1+I_1+E_1} \\
\frac{dE_2}{dt} &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2+I_2+E_2} - (b+c)E_2 - \alpha E_2 + \alpha E_1 + \frac{\gamma\alpha S_1 I_1}{S_1+I_1+E_1}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = cE_2 - dI_2 - \alpha I_2 + \alpha I_1 - eI_2$$

ในระบบสมการ (2.5) ได้เพิ่มประชากรกลุ่ม $E_i, i = 1,2$ ซึ่งหมายถึง ประชากรที่ติดเชื้อในระยะฟักตัวในเมือง i ดังนั้นประชากรรวม $N = S + E + I$ จะเห็นว่ามีการใช้ค่าอุบัติการณ์ในแบบจำลอง กำหนดให้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $S_i(0) \geqslant 0, E_i(0) \geqslant 0$ และ $I_i(0) \geqslant 0$ ระบบสมการ (2.5) ไม่เป็นลบ (นั่นคือ $S_i(0) \geqslant 0, E_i(0) \geqslant 0$ และ $I_i(0) \geqslant 0$ สำหรับ $t > 0, i = 1,2$) ภายใต้สมมติฐาน $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ จากระบบสมการ (2.5) ได้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานคือ

$$R_0 = \frac{\beta c}{(b+c)(d+e)}, \qquad R_{0\gamma} = \frac{(\beta + \gamma\alpha)c}{(b+c)(d+e)} = R_0 + \frac{\gamma\alpha c}{(b+c)(d+e)} \tag{2.4}$$

จากสมการ (2.6) $R_{0\gamma}$ คือค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของระบบสมการ (2.5) และ R_0 คือค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานสำหรับประชากรที่ไม่มีการเดินทางระหว่างสองเมือง (เมื่อ $\gamma = 0$) จะเห็นได้ว่าเมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดเสถียรภาพ ในทางกลับกัน เมื่อ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจุดเสถียรภาพ ในทำนองเดียวกันเมื่อประชากรมีการเดินทางระหว่างเมือง ($\gamma \neq 0$) $R_{0\gamma} < 1$ ทำให้จุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดเสถียรภาพ และเมื่อ $R_{0\gamma} > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่จะเป็นจุดเสถียรภาพ

Adisak et al. (2013) ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง *SEIRS* กับการติดเชื้อที่สัมพันธ์กับการเดินทาง โดยเพิ่มกลุ่มประชากรจากงานวิจัยของ อุยวาน และ จินอิง ซุย ขึ้นมาหนึ่งกลุ่มประชากร คือ กลุ่ม R_i ซึ่งกลุ่ม R_i แทนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ ในเมือง i และประชากรทั้งหมด ในเมือง i แทน $N_i = S_i + E_i + I_i + R_i$ เมื่อ $i = 1,2$ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2} \\
\frac{dE_1}{dt} &= \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_1 + \alpha_1 E_2 + \frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2} \\
\frac{dI_1}{dt} &= cE_1 - (e + d + \alpha_1)I_1 + \alpha_1 I_2 \\
\frac{dR_1}{dt} &= dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2 \\
\frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1} \\
\frac{dE_2}{dt} &= \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - (b + c + \alpha_1)E_2 + \alpha_1 E_1 + \frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1} \\
\frac{dI_2}{dt} &= cE_2 - (e + d + \alpha_1)I_2 + \alpha_1 I_1 \\
\frac{dR_2}{dt} &= dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1
\end{aligned} \tag{2.5}$$

จากระบบสมการ (2.7) โรคจะส่งผ่านด้วยอัตราอุบัติการณ์ (นั่นคืออัตราผู้ติดเชื้อรายใหม่) $\dfrac{\beta S_j I_j}{N_j}$ ภายในเมือง j ($j = 1, 2$) อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมืองเป็นค่าคงที่ β และ α คืออัตราการเดินทางออกจากเมือง เมื่อประชากรในเมือง j เดินทางไปยังเมือง i โรคจะถูกส่งด้วยอัตราอุบัติการณ์ $\dfrac{\gamma \alpha_1 S_j I_j}{N_j}$ เมื่อ γ คืออัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ซึ่งได้กำหนดค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานไว้ดังนี้

$$R_0 = \frac{\beta c}{(b+c)(d+e)}, \qquad R_{0\gamma} = \frac{(\beta + \gamma\alpha)c}{(b+c)(d+e)} = R_0 + \frac{\gamma \alpha_1 c}{(b+c)(d+e)} \tag{2.6}$$

จากสมการ (2.8) $R_{0\gamma}$ คือค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของระบบสมการ (2.7) และ R_0 คือค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานสำหรับประชากรที่ไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง จะเห็นได้ว่า กรณีที่ไม่มีการเดินทางของประชากร เมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P_0) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพและ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P_*) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ กรณีที่มีการเดินทางของประชากรระหว่างเมือง 2 เมือง เมื่อ $R_{0\gamma} < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P_1) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพและ $R_{0\gamma} > 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^*) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ

Liu et al. (2007) ได้สร้างแบบจำลองการระบาด *SIQS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่มีการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + dI_1 + fQ_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\
\frac{dI_1}{dt} &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha)I_1 + (1-\theta)\alpha I_2 + (1-\theta)\frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\
\frac{dQ_1}{dt} &= \theta \alpha I_2 + \theta \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (e + f)Q_1 \\
\frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + dI_2 + fQ_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1} \\
\frac{dI_2}{dt} &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha)I_2 + (1-\theta)\alpha I_1 + (1-\theta)\frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1} \\
\frac{dQ_2}{dt} &= \theta \alpha I_1 + \theta \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (e + f)Q_2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

กำหนดให้ $\theta_e, \theta_d, 0 \leqslant \theta_e, \theta_d \leqslant 1$ ใช้ในการตรวจสอบประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกคัดกรองได้สำเร็จ กำหนดค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานไว้ดังนี้

$$R_{0\gamma\theta} = \frac{\beta + (1-\theta)\gamma\alpha}{c + d + \theta\alpha} \tag{2.8}$$

จากสมการ (2.10) $R_{0\gamma\theta}$ คือค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของระบบสมการ (2.9) พบว่า เมื่อ $R_{0\gamma\theta} < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E_0) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ และในทางกลับกันเมื่อ $R_{0\gamma\theta} > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ

Nirwani et al. (2016) ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวของกับโรคระบาด โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อที่ถูกคัดแยก และกลุ่มที่หายจากการติดเชื้อ ซึ่งมีรูปแบบโมเดลคือ *SIQR* ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= A - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - dS \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)I \\
\frac{dQ}{dt} &= \delta I - (d + \alpha_2 + \varepsilon)Q \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I + \varepsilon Q - dR
\end{aligned} \tag{2.9}$$

จากสมการ (2.11) กำหนดให้ A หมายถึง อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน β หมายถึง อัตราการแพร่กระจายของโรค d หมายถึง อัตราการตายตามธรรมชาติ γ หมายถึง อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการเป็นโรค δ หมายถึง อัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อ α_1 หมายถึง อัตราการตายด้วยโรคในกลุ่ม I ε หมายถึง อัตราการหายจากการเป็นโรค เนื่องจากถูกกักกันบริเวณจากการติดเชื้อ และ α_2 หมายถึง อัตราการตายด้วยโรคในกลุ่ม Q ได้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน (R_0) โดยวิธีการแนวคิดของเมทริกซ์รุ่นถัดไป คือ

$$R_0 = \frac{\beta A}{d(\gamma + \delta + d + \alpha_1)} \tag{2.10}$$

จากสมการ (2.12) R_0 คือค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของระบบสมการ (2.11) พบว่าเมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E_0) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ และในทางกลับกันเมื่อ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการจัดทำโครงงานวิจัยเรื่อง แบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง มีวิธีดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1 การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

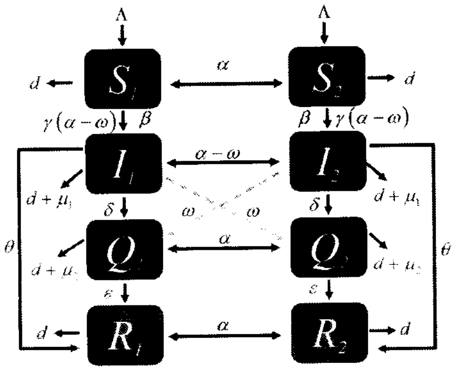
3.2 การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

3.1 การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยครั้งนี้พัฒนาแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ซึ่งแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่มดังนี้ S_i แทนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ **(Susceptible)** I_i แทนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (Infected) Q_i แทนประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Quarantine) และ R_i แทนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (Removed) ในเมือง i เมื่อ $i; i = 1, 2$ โดยที่ทั้งสองเมืองมีลักษณะที่เหมือนกัน และสมมติฐานของแบบจำลองมีดังนี้

- ประชากรที่เดินทางไม่มีการคลอดและการเสียชีวิตระหว่างการเดินทาง
- ประชากรที่ติดเชื้อไม่หายจากการเป็นโรคระหว่างการเดินทาง
- ประชากรที่ติดเชื้อสามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้ทันที และไม่ติดเชื้อตั้งแต่แรกเกิด
- ประชากรที่ติดเชื้อและได้รับการคัดแยกออก ไม่สามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้
- พารามิเตอร์และอัตราต่าง ๆ ไม่เป็นจำนวนลบ
- อัตราการเดินทางออกจากเมือง มากกว่า อัตราการคัดแยกประชากรที่สำเร็จจากเมือง i ไปเมือง j $(\alpha > \omega)$
- โรคจะส่งผ่านด้วยอัตราอุบัติการณ์ (นั่นคืออัตราผู้ติดเชื้อรายใหม่) $\beta S_j I_j$ ภายในเมือง j เมื่อ $j = 1, 2$ อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมืองเป็นค่าคงที่ β
- เมื่อประชากรในเมือง j เดินทางไปยังเมือง i โรคจะถูกส่งด้วยอัตราอุบัติการณ์ $\gamma \alpha S_j I_j; (j = 1, 2)$ เมื่อ γ อัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

การเปลี่ยนแปลงของแต่ละกลุ่มประชากร แสดงในรูปที่ 3.1 พารามิเตอร์และความหมายแสดงในตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แบบจำลองการระบาดเมื่อมีการเดินทางระหว่างสองเมือง

ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์ และความหมาย

พารามิเตอร์	ความหมาย
Λ	อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน
β	อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมือง
ω	อัตราการคัดแยกประชากรที่สำเร็จจากเมือง i ไปเมือง j
γ	อัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j
α	อัตราการเดินทางออกจากเมือง โดยที่ $\alpha-\omega>0$
μ_1	อัตราการตายด้วยโรคของประชากรกลุ่ม I
μ_2	อัตราการตายด้วยโรคของประชากรกลุ่ม Q
δ	อัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อ
ε	อัตราการหายจากการเป็นโรค เนื่องจากถูกกักกันบริเวณจากการติดเชื้อ
θ	อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการเป็นโรค
d	อัตราการตายตามธรรมชาติ

จากรูปที่ 3.1 สามารถเขียนให้อยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งบ่งบอกการเปลี่ยนแปลงตามเวลาใช้แทนการเปลี่ยนแปลงของประชากรแต่ละกลุ่ม โดยอัตราที่มีผลต่อการเพิ่มขึ้นของประชากรจะมีเครื่องหมายเป็นบวกและในทางกลับกันหากอัตราใด ที่ทำให้ประชากรลดลงมีเครื่องหมายเป็นลบ

ประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อเมือง i มีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการเกิดหรืออัตราการย้ายถิ่นฐาน ด้วยอัตรา Λ และอัตราการเดินทางออกจากเมือง j ด้วยอัตรา α ในทางกลับกันประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อเมือง i มีจำนวนลดลงเนื่องจากอัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมืองด้วยอัตรา β การตายตามธรรมชาติ ด้วยอัตรา d อัตราการเดินทางออกจากเมือง i และเมื่อประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อเมือง i เดินทางไปยังเมือง j ด้วยอัตราอุบัติการณ์ โดยที่เมือง i แทนเมืองที่ 1 และเมือง j แทนเมืองที่ 2 ซึ่งประชากรกลุ่มเสี่ยงทั้ง 2 เมืองมีลักษณะที่เหมือนกัน สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dS_i}{dt} = \Lambda - \beta S_i I_i - dS_i - \alpha S_i + \alpha S_j - \gamma \alpha S_j I_j$$

ประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อเมือง i มีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากอัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมือง ด้วยอัตรา β การเดินทางออกจากเมือง j ด้วยอัตรา $\alpha - \omega$ และการเดินทางออกจากเมืองด้วยอัตราอุบัติการณ์ ในทางกลับกันประชากรที่ติดเชื้อเมือง i ลดลงเมื่อมีการเดินทางออกจากเมือง i ด้วยอัตรา $\alpha - \omega$ การตายตามธรรมชาติ ด้วยอัตรา d การตายด้วยโรคของประชากรที่ติดเชื้อ ด้วยอัตรา μ_1 การคัดแยกประชากรที่สำเร็จจากเมือง i ไปเมือง j ด้วยอัตรา ω การคัดแยกจากการติดเชื้อ ด้วยอัตรา δ และ ผู้ที่หายจากการเป็นโรค ด้วยอัตรา θ โดยที่เมือง i แทนเมืองที่ 1 และเมือง j แทนเมืองที่ 2 ซึ่งประชากรกลุ่มเสี่ยงทั้ง 2 เมืองมีลักษณะที่เหมือนกัน สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dI_i}{dt} = \beta S_i I_i + (\alpha - \omega) I_j - (\alpha - \omega) I_i - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) I_i + (\alpha - \omega)\gamma S_j I_j$$

ประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยกเมือง i มีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจาก การคัดแยกจากการติดเชื้อ ด้วยอัตรา δ อัตราการเดินทางออกจากเมือง j ด้วยอัตรา α และอัตราการคัดแยกประชากรจากเมือง i ไปเมือง j ด้วยอัตรา ω ในทางกลับกันประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยกเมือง i ลดลงเนื่องจากการตายตามธรรมชาติ ด้วยอัตรา d การตายด้วยโรคของประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยกเมือง i อัตราการเดินทางออกจากเมือง i ด้วยอัตรา α และการหายจากการเป็นโรค เนื่องจากถูกกักกันบริเวณจากการติดเชื้อ ด้วยอัตรา ε โดยที่เมือง i แทนเมืองที่ 1 และเมือง j แทนเมืองที่ 2 ซึ่งประชากรกลุ่มเสี่ยงทั้ง 2 เมืองมีลักษณะที่เหมือนกัน สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dQ_i}{dt} = \delta I_i - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_i - \alpha Q_i + \alpha Q_j + \omega I_j$$

ประชากรที่หายจากการติดเชื้อเมือง i มีจำนวนเพิ่มขึ้นเนื่องจากการหายจากการเป็นโรคเนื่องจากถูกกักกันบริเวณจากการติดเชื้อ ด้วยอัตรา ε อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการเป็นโรค ด้ยอัตรา θ และอัตราการเดินทางออกจากเมือง j ด้วยอัตรา α ในทางกลับกันประชากรที่หายจากการติดเชื้อเมือง i ลดลงเนื่องจากการตายตามธรรมชาติ ด้วยอัตรา d และอัตราการเดินทางออกจากเมือง i ด้วยอัตรา α โดยที่เมือง i แทนเมืองที่ 1 และเมือง j แทนเมืองที่ 2 ซึ่งประชากรกลุ่มเสี่ยงทั้ง 2 เมืองมีลักษณะที่เหมือนกัน สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dR_i}{dt} = \varepsilon Q_i - dR_i + \theta I_i - \alpha R_i + \alpha R_j$$

จากรูปที่ 3.1 และสมมติฐานข้องต้นจะได้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางอยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= \Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma \alpha S_2 I_2 \\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 I_1 + (\alpha - \omega) I_2 - (d + \mu_1 + \alpha + \delta + \theta) I_1 + (\alpha - \omega)\gamma S_2 I_2 \\
\frac{dQ_1}{dt} &= \delta I_1 - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_1 - \alpha Q_1 + \alpha Q_2 + \omega I_2 \\
\frac{dR_1}{dt} &= \varepsilon Q_1 - dR_1 + \theta I_1 - \alpha R_1 + \alpha R_2 \\
\frac{dS_2}{dt} &= \Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma \alpha S_1 I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 I_2 + (\alpha - \omega) I_1 - (d + \mu_1 + \alpha + \delta + \theta) I_2 + (\alpha - \omega)\gamma S_1 I_1 \\
\frac{dQ_2}{dt} &= \delta I_2 - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_2 - \alpha Q_2 + \alpha Q_1 + \omega I_1 \\
\frac{dR_2}{dt} &= \varepsilon Q_2 - dR_2 + \theta I_2 - \alpha R_2 + \alpha R_1
\end{aligned} \tag{3.1}$$

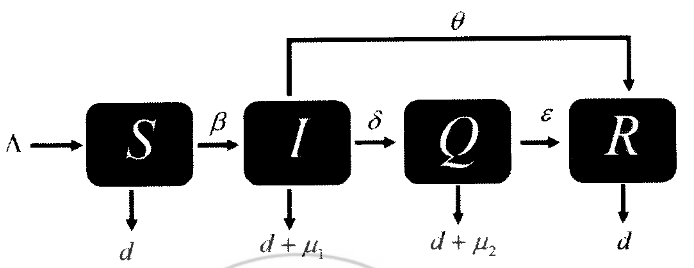
3.2 วิเคราะห์แบบจำลอง

ในการวิเคราะห์แบบจำลองมีการพิจารณา 2 กรณี คือ กรณีประชากรไม่มีการเดินทาง และกรณีมีการเดินทางของประชากรระหว่างเมือง 2 เมือง

3.1.1 ประชากรไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง

1) จุดสมดุลของแบบจำลอง

เมื่อไม่พิจารณาการเดินทางของประชากร นั่นคือ $\alpha = \omega = 0$ แล้วสมการ (3.1) สามารถเขียนได้เป็นแบบจำลอง $SIQR$ ดังนี้



รูปที่ 3.2 แบบจำลองการระบาดเมื่อไม่มีการเดินทาง ($\alpha = \omega = 0$)

จากรูปที่ 3.2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - dS \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - (d + \mu_1 + \delta + \theta)I \\
\frac{dQ}{dt} &= \delta I - (d + \mu_2 + \varepsilon)Q \\
\frac{dR}{dt} &= \varepsilon Q - dR + \theta I
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

กำหนดให้ $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ จะได้ว่า

$$\Lambda - \beta SI - dS = 0 \qquad (3.3)$$

$$\beta SI - (d + \mu_1 + \delta + \theta)I = 0 \qquad (3.4)$$

$$\delta I - (d + \mu_2 + \varepsilon)Q = 0 \qquad (3.5)$$

$$\varepsilon Q - dR + \theta I = 0 \qquad (3.6)$$

นำสมการ (3.4) จัดรูปสมการ จะได้

$$(\beta S - (d + \mu_1 + \delta I + \theta))I = 0 \qquad (3.7)$$

จากสมการ (3.7) พบว่าในการหาจุดสมดุลพิจารณา 2 กรณี คือ $I = 0$ หรือ $\beta S - (d + \mu_1 + \delta I + \theta) = 0$

กรณีที่ 1 $I = 0$ จะได้ว่า

$$S = \frac{\Lambda}{d}, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

ดังนั้นจุดสมดุล คือ

$$E^0 = (S^0, I^0, Q^0, R^0) = (\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0)$$

โดยเรียกจุดสมดุล E^0 นี้ว่า **จุดสมดุลที่อิสระจากโรค** (Disease-free equilibrium)

กรณีที่ 2 $\beta S - (d + \mu_1 + \delta I + \theta) = 0$

จะได้ว่า

$$S = \frac{(d + \mu_1 + \delta I + \theta)}{\beta} \tag{3.8}$$

พิจารณาสมการ (3.3)

$$\Lambda - \beta SI - dS = 0$$

นำสมการ (3.8) แทนในสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$I = \frac{\beta\Lambda - d(d + \mu_1 + \delta + \theta)}{\beta(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \tag{3.9}$$

ดังนั้นจุดสมดุล คือ $E^1 = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$

เมื่อ

$$S^* = \frac{(d + \mu_1 + \delta + \theta)}{\beta}, \quad Q^* = \frac{\delta I^*}{(d + \mu_2 + \varepsilon)}$$

$$I^* = \frac{\beta\Lambda - d(d + \mu_1 + \delta + \theta)}{\beta(d + \mu_1 + \delta + \theta)}, \quad R^* = \frac{(\varepsilon\delta + \theta(d + \mu_2 + \varepsilon))I^*}{d(d + \mu_2 + \varepsilon)}$$

โดยเรียกจุดสมดุล E^1 ว่า **จุดสมดุลที่โรคคงอยู่** (Endemic equilibrium)

2) ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน

ลำดับต่อไปเป็นการหาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน โดยวิธีการแนวคิดของเมทริกซ์รุ่นถัดไป (Next generation matrix) จากสมการ (3.2) สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S \\ I \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda - \beta SI - dS \\ \beta SI - (d + \mu_1 + \delta + \theta)I \\ \delta I - (d + \mu_2 + \varepsilon)Q \\ \varepsilon Q - dR + \theta I \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

เนื่องจากการหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองเกี่ยวพันกับการแพร่เชื้อในประชากร ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการหาค่าระดับการติดเชื้อเราจึงต้องการเพียงกลุ่มของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) และกลุ่มของประชากรที่ติดเชื้อ (I) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda - \beta SI - dS \\ \beta SI - (d + \mu_1 + \delta + \theta)I \end{bmatrix} \tag{3.11}$$
$$= F_i - V_i$$

เมื่อ

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta SI \end{bmatrix} \text{ และ } V_i = \begin{bmatrix} -\Lambda + \beta SI + dS \\ (d + \mu_1 + \delta + \theta)I \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.12) คือ

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta I & \beta S \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} \beta I + d & \beta S \\ 0 & (d + \mu_1 + \delta + \theta) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

แทนจุดสมดุลที่อิสระจากโรค $(S^0, I^0, Q^0, R^0) = (\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0)$ ในสมการ (3.13) จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{d} \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} d & \frac{\beta\Lambda}{d} \\ 0 & (d + \mu_1 + \delta + \theta) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

จากสมการ (3.14) ได้เมทริกซ์ผกผันของ V ดังนี้

$$V^{-1} = \frac{1}{d(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \cdot \begin{bmatrix} (d + \mu_1 + \delta + \theta) & -\frac{\beta\Lambda}{d} \\ 0 & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{\beta\Lambda}{d^2(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \\ 0 & \frac{1}{(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \end{bmatrix}$$

นำเมทริกซ์ F คูณ V^{-1} จะได้ว่า

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{\beta\Lambda}{d^2(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \\ 0 & \frac{1}{(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{d(d + \mu_1 + \delta + \theta)} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.15)

ให้ λ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{d(d + \mu_1 + \delta + \theta)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ว่า $\det(FV^{-1} - \lambda I) = -\lambda(\dfrac{\beta\Lambda}{d(d+\mu_1+\delta+\theta)} - \lambda) = 0$

ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.15) คือ $\lambda_1 = 0$ และ $\lambda_2 = \dfrac{\beta\Lambda}{d(d+\mu_1+\delta+\theta)}$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
\rho(FV^{-1}) &= \max_{1\le i\le 2}\{|\lambda_i|\} \\
&= \max\{|\lambda_1, \lambda_2|\} \\
&= \frac{\beta\Lambda}{d(d+\mu_1+\delta+\theta)}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\rho(FV^{-1}) = \dfrac{\beta\Lambda}{d(d+\mu_1+\delta+\theta)}$

ดังนั้น

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{d(d+\mu_1+\delta+\theta)} \tag{3.16}$$

เมื่อพิจารณา $E^1(S^*, I^*, Q^*, R^*)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
S^* &= \frac{(d+\mu_1+\delta+\theta)}{\beta}, \quad Q^* = \frac{\delta I^*}{(d+\mu_2+\varepsilon)} \\
I^* &= \frac{d}{\beta}(R_0 - 1), \quad R^* = \frac{(\varepsilon\delta + \theta(d+\mu_2+\varepsilon))I^*}{d(d+\mu_2+\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

ซึ่ง I^* มีค่าเป็นจำนวนบวกเมื่อ $R_0 > 1$

3) เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง

จากระบบสมการ (3.2) กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
\Lambda - \beta SI - dS &= y_1 \\
\beta SI - (d+\mu_1+\delta+\theta)I &= y_2 \\
\delta I - (d+\mu_2)Q - \varepsilon Q &= y_3 \\
\varepsilon Q - dR + \theta I &= y_4
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลอง คือ

$$
J(E) = \begin{bmatrix}
\frac{\partial y_1}{\partial S} & \frac{\partial y_1}{\partial I} & \frac{\partial y_1}{\partial Q} & \frac{\partial y_1}{\partial R} \\
\frac{\partial y_2}{\partial S} & \frac{\partial y_2}{\partial I} & \frac{\partial y_2}{\partial Q} & \frac{\partial y_2}{\partial R} \\
\frac{\partial y_3}{\partial S} & \frac{\partial y_3}{\partial I} & \frac{\partial y_3}{\partial Q} & \frac{\partial y_3}{\partial R} \\
\frac{\partial y_4}{\partial S} & \frac{\partial y_4}{\partial I} & \frac{\partial y_4}{\partial Q} & \frac{\partial y_4}{\partial R}
\end{bmatrix}
$$

จะได้ว่า

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\beta I - d & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta I & \beta S - (d + \alpha_1 + \delta + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \alpha_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $R_0 < 1$ แล้วระบบสมการ (3.2) จะมีจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (locally asymptotically stable)

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.17) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) คือ

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -d & -\frac{\beta\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \delta + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \mu_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

จากงานวิจัยของ Cui et al. (2005) ถ้า $\det(J(E^0)) > 0$ และ $\operatorname{tr}(J(E^0)) < 0$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^0)$ มีค่าเป็นลบ จาก ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3.18) ที่จุดสมดุลที่จุดอิสระจากโรค (E^0) จะได้

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(J(E^0)) &= -d + \frac{\beta\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \delta + \theta) - (d + \mu_2 + \varepsilon) - d \\ &= -2d - (d + \mu_2 + \varepsilon) - (d + \mu_1 + \delta + \theta)(1 - R_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(J(E^0)) &= \begin{vmatrix} -d & -\frac{\beta\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \delta + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \mu_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{vmatrix} \\ &= -d\left(\frac{\beta\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \delta + \theta)\right)(d + \mu_2 + \varepsilon)d \\ &= -\beta\Lambda d(d + \mu_2 + \varepsilon) - d^2(d + \mu_1 + \delta + \theta)(d + \mu_2 + \varepsilon) \\ &= d^2(d + \mu_2 + \varepsilon)(d + \mu_1 + \delta + \theta)(1 - R_0) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\operatorname{tr}(J(E^0)) < 0$ และ $\det(J(E^0)) > 0$ เมื่อ $R_0 < 1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^0)$ มีค่าเป็นลบ

ดังนั้น จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0 < 1$

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $R_0 > 1$ แล้วระบบสมการ (3.2) จะมีสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^1) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.17) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^1) คือ

$$J(E^1) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - d & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & \beta S^* - (d + \mu_1 + \delta + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \mu_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3.19) ที่จุดสมดุลที่จุดอิสระจากโรค (E^1)
ถ้า $\det(J(E^1) > 0$ และ $\mathrm{tr}(J(E^1)) < 0$ จะทำให้ได้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^1)$ มีค่าเป็นลบ จาก (3.19) จะได้

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(J(E^1)) &= -\beta I^* - d + \beta S^* - (d + \mu_1 + \delta + \theta) - (d + \mu_2 + \varepsilon) - d \\ &= -\beta \frac{d}{\beta}(R_0 - 1) - d + \beta \frac{(d + \mu_1 + \delta + \theta)}{\beta} - (d + \mu_1 + \delta + \theta) \\ &\quad -(d + \mu_2 + \varepsilon) - d \\ &= -d(R_0 - 1) - (d + \mu_2 + \varepsilon) - 2d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(J(E^1)) &= \begin{vmatrix} -\beta I^* - d & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & \beta S^* - (d + \mu_1 + \delta + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \mu_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{vmatrix} \\ &= (-\beta I^* - d)(\beta S^* d(d + \mu_2 + \varepsilon) - d(d + \mu_2 + \varepsilon)(d + \mu_1 + \delta + \theta)) \\ &\quad + \beta S^* \beta I^* d(d + \mu_2 + \varepsilon) \\ &= d^2(R_0 - 1)(d + \mu_2 + \varepsilon)(d + \mu_1 + \delta + \theta) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\mathrm{tr}(J(E^1)) < 0$ และ $\det(J(E^1)) > 0$ เมื่อ $R_0 > 1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^1)$ มีค่าเป็นลบ
ดังนั้น จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^1) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0 > 1$

3.1.2 มีการเดินทางของประชากรระหว่างเมือง 2 เมือง

พิจารณาสมการ (3.1) เมื่อประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและประชากรที่ติดเชื้อสามารถเดินทางเชื่อมต่อกันระหว่าง 2 เมือง

1) จุดสมดุลของแบบจำลองคณิตศาสตร์

กำหนดให้ $\frac{dS_1}{dt} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dR_1}{dt} = \frac{dS_2}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma\alpha S_2 I_2 &= 0 \\
\beta S_1 I_1 + (\alpha - \omega) I_2 - (d + \mu_1 + \alpha + \delta + \theta) I_1 + (\alpha - \omega)\gamma S_2 I_2 &= 0 \\
\delta I_1 - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_1 - \alpha Q_1 + \alpha Q_2 + \omega I_2 &= 0 \\
\varepsilon Q_1 - dR_1 + \theta I_1 - \alpha R_1 + \alpha R_2 &= 0 \\
\Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma\alpha S_1 I_1 &= 0 \qquad (3.20) \\
\beta S_2 I_2 + (\alpha - \omega) I_1 - (d + \mu_1 + \alpha + \delta + \theta) I_2 + (\alpha - \omega)\gamma S_1 I_1 &= 0 \\
\delta I_2 - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_2 - \alpha Q_2 + \alpha Q_1 + \omega I_1 &= 0 \\
\varepsilon Q_2 - dR_2 + \theta I_2 - \alpha R_2 + \alpha R_1 &= 0
\end{aligned}$$

เนื่องจากทั้งสองเมืองมีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้น ระบบสมการ (3.20) กำหนดให้เป็น

$$\Lambda - \beta S_\gamma I_\gamma - dS_\gamma - \gamma\alpha S_\gamma I_\gamma = 0 \qquad (3.21)$$

$$\beta S_\gamma I_\gamma - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) I_\gamma + (\alpha - \omega)\gamma S_\gamma I_\gamma = 0 \qquad (3.22)$$

$$(\delta + \omega) I_\gamma - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_\gamma = 0 \qquad (3.23)$$

$$\varepsilon Q_\gamma - dR_\gamma + \theta I_\gamma = 0 \qquad (3.24)$$

นำสมการ (3.22) จัดรูปสมการ จะได้

$$(\beta S_\gamma - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) + (\alpha - \omega)\gamma S_\gamma) I_\gamma = 0 \qquad (3.25)$$

จากสมการ (3.25) พบว่าในการหาจุดสมดุลพิจารณา 2 กรณี คือ $I_\gamma = 0$ หรือ
$\beta S_\gamma - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) + (\alpha - \omega)\gamma S_\gamma = 0$

กรณีที่ 1 $I_\gamma = 0$ จะได้ว่า

$$S = \frac{\Lambda}{d}, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

ดังนั้นจุดสมดุล คือ

$$P^0 = (S_\gamma^0, I_\gamma^0, Q_\gamma^0, R_\gamma^0) = (\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0), \gamma = 1, 2$$

โดยเรียกจุดสมดุล P^0 ว่า **จุดสมดุลที่อิสระจากโรค**

กรณีที่ 2 $\beta S_\gamma - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) + (\alpha - \omega)\gamma S_\gamma = 0$
จะได้ว่า

$$S_\gamma = \frac{(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}{\beta + (\alpha - \omega)\gamma} \tag{3.26}$$

พิจารณาสมการ (3.21)

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta S_\gamma I_\gamma - dS_\gamma - \gamma \alpha S_\gamma I_\gamma &= 0 \\ \Lambda - (\beta I_\gamma + d + \gamma \alpha I_\gamma) S_\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

นำสมการ (3.26) แทนในสมการ (3.27) จะได้

$$\begin{aligned} \Lambda - (\beta I_\gamma + d + \gamma\alpha I_\gamma)\frac{(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}{\beta + (\alpha - \omega)\gamma} &= 0 \\ \Lambda(\beta + (\alpha - \omega)\gamma) - (\beta I_\gamma + d + \gamma\alpha I_\gamma)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) &= 0 \\ \Lambda(\beta + (\alpha - \omega)\gamma) - (\beta + \gamma\alpha)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)I_\gamma - d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Lambda(\beta + (\alpha - \omega)\gamma) - d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) = (\beta + \gamma\alpha)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)I_\gamma$$

$$I_\gamma = \frac{\Lambda(\beta + (\alpha - \omega)\gamma) - d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}{(\beta + \gamma\alpha)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}$$

ดังนั้น จุดสมดุล คือ $P^* = (S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*)$
เมื่อ

$$\begin{aligned} S_\gamma^* &= \frac{(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}{\beta + (\alpha - \omega)\gamma} \\ I_\gamma^* &= \frac{\Lambda(\beta + (\alpha - \omega)\gamma) - d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}{(\beta + \gamma\alpha)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)} \\ Q_\gamma^* &= \frac{(\delta + \omega)I_\gamma^*}{d + \mu_2 + \varepsilon} \\ R_\gamma^* &= \frac{(\varepsilon(\delta + \omega) + \theta(d + \mu_2 + \varepsilon))I_\gamma^*}{d(d + \mu_2 + \varepsilon)} \end{aligned}$$

โดยเรียกจุดสมดุล P^* ว่า **จุดสมดุลที่โรคคงอยู่**

2) ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน

ลำดับต่อไปเป็นการหาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน โดยวิธีการแนวคิดของเมทริกซ์รุ่นถัดไป (Next generation matrix) จากสมการ (3.1) สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S_1 \\ I_1 \\ Q_1 \\ R_1 \\ S_2 \\ I_2 \\ Q_2 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma\alpha S_2 I_2 \\ \beta S_1 I_1 + (\alpha-\omega)I_2 - (d+\mu_1+\alpha+\delta+\theta)I_1 + (\alpha-\omega)\gamma S_2 I_2 \\ \delta I_1 - (d+\mu_2+\varepsilon)Q_1 - \alpha Q_1 + \alpha Q_2 + \omega I_2 \\ \varepsilon Q_1 - dR_1 + \theta I_1 - \alpha R_1 + \alpha R_2 \\ \Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_1 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma\alpha S_1 I_1 \\ \beta S_2 I_2 + (\alpha-\omega)I_1 - (d+\mu_1+\alpha+\delta+\theta)I_2 + (\alpha-\omega)\gamma S_1 I_1 \\ \delta I_2 - (d+\mu_2+\varepsilon)Q_2 - \alpha Q_2 + \alpha Q_1 + \omega I_1 \\ \varepsilon Q_2 - dR_2 + \theta I_2 - \alpha R_2 + \alpha R_1 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

เนื่องจากการหาค่าระดับการติดเชื้อของแบบจำลองเกี่ยวพันกับการแพร่เชื้อในประชากร ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการหาค่าระดับการติดเชื้อเราจึงต้องการเพียงกลุ่มของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) และกลุ่มของประชากรที่ติดเชื้อ (I) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S_1 \\ I_1 \\ S_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma\alpha S_2 I_2 \\ \beta S_1 I_1 + (\alpha-\omega)I_2 - (d+\mu_1+\alpha+\delta+\theta)I_1 + (\alpha-\omega)\gamma S_2 I_2 \\ \Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_1 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma\alpha S_1 I_1 \\ \beta S_2 I_2 + (\alpha-\omega)I_1 - (d+\mu_1+\alpha+\delta+\theta)I_2 + (\alpha-\omega)\gamma S_1 I_1 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

จากสมการ (3.29) จะได้ว่า

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta S_1 I_1 + (\alpha-\omega)\gamma S_2 I_2 \\ 0 \\ \beta S_2 I_2 + (\alpha-\omega)\gamma S_1 I_1 \end{bmatrix}, V_i = \begin{bmatrix} -\Lambda + \beta S_1 I_1 + dS_1 + \alpha S_1 - \alpha S_2 + \gamma\alpha S_2 I_2 \\ -(\alpha-\omega)I_2 + (d+\mu_1+\alpha+\delta+\theta)I_1 \\ -\Lambda + \beta S_2 I_2 + dS_1 + \alpha S_2 - \alpha S_1 + \gamma\alpha S_1 I_1 \\ -(\alpha-\omega)I_1 + (d+\mu_1+\alpha+\delta+\theta)I_2 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

เนื่องจากการแพร่เชื้อของกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในเมือง 1 กับ เมือง 2 มีลักษณะเหมือนกัน เช่นเดียวกับกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อในเมือง 1 กับ เมือง 2 ก็มีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นการหาค่าระดับการติดเชื้อเราจึงพิจารณาแค่เมืองเดียว จะได้ว่า

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta S_\gamma I_\gamma + (\alpha-\omega)\gamma S_\gamma I_\gamma \end{bmatrix}, V_i = \begin{bmatrix} -\Lambda + \beta S_\gamma I_\gamma + dS_\gamma + \gamma\alpha S_\gamma I_\gamma \\ (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)I_\gamma \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.31) คือ

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)I_\gamma & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S_\gamma \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} (\beta+\gamma\alpha)I_\gamma + d & (\beta+\gamma\alpha)S_\gamma \\ 0 & (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

แทนจุดสมดุลที่อิสระจากโรค $P^0 = (S_\gamma^0, I_\gamma^0, Q_\gamma^0, R_\gamma^0) = (\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0)$ ในสมการ (3.32) จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} d & (\beta+\gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} \\ 0 & (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

จากสมการ (3.33) ได้เมทริกซ์ผกผันของ V ดังนี้

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \frac{1}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \cdot \begin{bmatrix} (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) & -(\beta+\gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{(\beta+\gamma\alpha)\Lambda}{d^2(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \\ 0 & \frac{1}{(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นำเมทริกซ์ F คูณ V^{-1} จะได้ว่า

$$\begin{aligned} FV^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{(\beta+\gamma\alpha)\Lambda}{d^2(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \\ 0 & \frac{1}{(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.34}$$

หาค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.34)

ให้ λ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) - \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ว่า $\det(FV^{-1} - \lambda I) = -\lambda(-\frac{(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} - \lambda) = 0$

ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะของสมการ (3.34) คือ $\lambda_1 = 0$ และ $\lambda_2 = -\frac{(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)}$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \rho(FV^{-1}) &= \max_{1\le i\le 2}\{|\lambda_i|\} \\ &= \max|\lambda_1, \lambda_2|\} \\ &= \frac{(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} \end{aligned}$$

นั่นคือ $\rho(FV^{-1}) = \dfrac{(\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} R_{0\gamma} &= \frac{(\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)} \\ &= \frac{\beta\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)} + \frac{(\alpha - \omega)\gamma\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)} \\ &= R_{01} + R_{02} \end{aligned}$$

เมื่อ

$$R_{01} = \frac{\beta\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)} \quad \text{และ} \quad R_{02} = \frac{(\alpha - \omega)\gamma\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}$$

เมื่อพิจารณา $P^*(S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*)$ จะได้

$$S_\gamma^* = \frac{(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}{\beta + (\alpha - \omega)\gamma}, \quad Q_\gamma^* = \frac{(\delta + \omega)I_\gamma^*}{d + \mu_2 + \varepsilon}$$

$$I_\gamma^* = \frac{d}{\beta + \gamma\alpha}(R_{0\gamma} - 1), \quad R_\gamma^* = \frac{(\varepsilon(\delta + \omega) + \theta(d + \mu_2 + \varepsilon))I_\gamma^*}{d(d + \mu_2 + \varepsilon)}$$

ซึ่ง I_γ^* มีค่าเป็นบวกเมื่อ $R_{0\gamma} > 1$

3) เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง

จากสมการ (3.1) กำหนดให้

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma\alpha S_2 I_2 &= y_1 \\ \beta S_1 I_1 + (\alpha - \omega)I_2 - (d + \mu_1 + \delta + \theta + \alpha)I_1 + (\alpha - \omega)\gamma S_2 I_2 &= y_2 \\ \delta I_1 - (d + \mu_2 + \varepsilon + \alpha)Q_1 + \alpha Q_2 + \omega I_2 &= y_3 \\ \varepsilon Q_1 + \theta I_1 - (d + \alpha)R_1 + \alpha R_2 &= y_4 \\ \Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma\alpha S_1 I_1 &= y_5 \\ \beta S_2 I_2 + (\alpha - \omega)I_1 - (d + \mu_1 + \delta + \theta + \alpha)I_2 + (\alpha - \omega)\gamma S_1 I_1 &= y_6 \\ \delta I_2 - (d + \mu_2 + \varepsilon + \alpha)Q_2 + \alpha Q_1 + \omega I_1 &= y_7 \\ \varepsilon Q_2 + \theta I_2 - (d + \alpha)R_2 + \alpha R_1 &= y_8 \end{aligned}$$

ดังนั้นจาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลอง คือ

$$J(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial S_1} & \frac{\partial y_1}{\partial I_1} & \frac{\partial y_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_1}{\partial R_1} & \frac{\partial y_1}{\partial S_2} & \frac{\partial y_1}{\partial I_2} & \frac{\partial y_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_1}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial S_1} & \frac{\partial y_2}{\partial I_1} & \frac{\partial y_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_2}{\partial R_1} & \frac{\partial y_2}{\partial S_2} & \frac{\partial y_2}{\partial I_2} & \frac{\partial y_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_2}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial S_1} & \frac{\partial y_3}{\partial I_1} & \frac{\partial y_3}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_3}{\partial R_1} & \frac{\partial y_3}{\partial S_2} & \frac{\partial y_3}{\partial I_2} & \frac{\partial y_3}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_3}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial S_1} & \frac{\partial y_4}{\partial I_1} & \frac{\partial y_4}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_4}{\partial R_1} & \frac{\partial y_4}{\partial S_2} & \frac{\partial y_4}{\partial I_2} & \frac{\partial y_4}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_4}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_5}{\partial S_1} & \frac{\partial y_5}{\partial I_1} & \frac{\partial y_5}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_5}{\partial R_1} & \frac{\partial y_5}{\partial S_2} & \frac{\partial y_5}{\partial I_2} & \frac{\partial y_5}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_5}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_6}{\partial S_1} & \frac{\partial y_6}{\partial I_1} & \frac{\partial y_6}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_6}{\partial R_1} & \frac{\partial y_6}{\partial S_2} & \frac{\partial y_6}{\partial I_2} & \frac{\partial y_6}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_6}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_7}{\partial S_1} & \frac{\partial y_7}{\partial I_1} & \frac{\partial y_7}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_7}{\partial R_1} & \frac{\partial y_7}{\partial S_2} & \frac{\partial y_7}{\partial I_2} & \frac{\partial y_7}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_7}{\partial R_2} \\ \frac{\partial y_8}{\partial S_1} & \frac{\partial y_8}{\partial I_1} & \frac{\partial y_8}{\partial Q_1} & \frac{\partial y_8}{\partial R_1} & \frac{\partial y_8}{\partial S_2} & \frac{\partial y_8}{\partial I_2} & \frac{\partial y_8}{\partial Q_2} & \frac{\partial y_8}{\partial R_2} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$J(P) = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

เมื่อ

$$A_i = \begin{bmatrix} -(\beta I_i + d + \alpha) & -\beta S_i & 0 & 0 \\ \beta I_i & \beta S_i - (d + \mu_1 + \delta + \theta + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \mu_2 + \varepsilon + \alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d + \alpha) \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma\alpha I_i & -\gamma\alpha S_i & 0 & 0 \\ (\alpha - \omega)\gamma I_i & (\alpha - \omega)\gamma S_i + (\alpha - \omega) & 0 & 0 \\ 0 & \omega & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}; i = 1, 2$$

พิจารณา $\det(J(P) - \lambda I)$

$$\begin{aligned} \det(J(P) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} A_i - \lambda I & B_i \\ B_i & A_i - \lambda I \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_i + B_i - \lambda I & A_i + B_i - \lambda I \\ B_i & A_i - \lambda I \end{vmatrix}; R_1 + R_2 \longrightarrow R_1 \\ &= \begin{vmatrix} A_i + B_i - \lambda I & B_i \\ A_i + B_i - \lambda I & A_i - \lambda I \end{vmatrix}; \det A_i = \det A_i^T \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} (A_i + B_i) - \lambda I & B_i \\ 0 & (A_i - B_i)\lambda I \end{vmatrix} ; R_2 - R_1 \longrightarrow R_2$$

$$= \det(A_i + B_i - \lambda I)\det(A_i - B_i - \lambda I)$$

เมื่อ $\det(A_i B_i) = \det(A_i)\det(B_i)$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $R_{0\gamma} < 1$ แล้วระบบสมการ (3.1) จะมีจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.35) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) คือ

$$J(P^0) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -(d+\alpha) & -\beta\frac{\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \beta\frac{\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \delta + \theta + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d + \mu_2 + \varepsilon + \alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+\alpha) \end{bmatrix} \text{ และ}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\gamma\alpha\frac{\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha-\omega)\gamma\frac{\Lambda}{d} + (\alpha-\omega) & 0 & 0 \\ 20 & \omega & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

จาก $\det(J(P_0) - \lambda I) = \det((A+B) - \lambda I)\det((A-B) - \lambda I)$ จะได้

$$A + B = \begin{bmatrix} -d & -(\beta+\gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta + (\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} - U & 0 & 0 \\ 0 & \delta + \omega & -(d + \mu_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix} \text{ และ}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -(d+2\alpha) & -(\beta-\gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta - (\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} - K & 0 & 0 \\ 0 & \delta - \omega & -(d + \mu_2 + \varepsilon + 2\alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+2\alpha) \end{bmatrix}$$

เมื่อ $U = d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta$ และ $K = (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) - 2(\alpha - \omega)$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A + B$

ถ้า $\det(A + B) > 0$ และ $\mathrm{tr}(A + B) < 0$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $A + B$ เป็นลบ จะได้

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A + B) &= -d + (\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\frac{A}{d} - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) - (d + \mu_2 + \varepsilon) - d \\
&= -2d - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)(1 - R_{0\gamma}) - (d + \mu_2 + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
\det(A + B) = \begin{vmatrix} -d & -(\beta + \gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta + \omega & -(d + \mu_2 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -d^2(d + \mu_2 + \varepsilon)((\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)) \\
&= d^2(d + \mu_2 + \varepsilon)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) - d^2(d + \mu_2 + \varepsilon)(\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} \\
&= d^2(d + \mu_2 + \varepsilon)(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)(1 - R_{0\gamma})
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $\mathrm{tr}(A + B) < 0$ และ $\det(A + B) > 0$ เมื่อ $R_{0\gamma} < 1$ พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A - B$ ในทำนองเดียวกันกับเมทริกซ์ $A + B$ คือ ถ้า $\det(A - B) > 0$ และ $\mathrm{tr}(A - B) < 0$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $A - B$ เป็นลบ จะได้

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A - B) &= -(d + 2\alpha) + (\beta - (\alpha - \omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d} - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) - 2(\alpha - \omega) \\
&\quad -(d + \mu_2 + \varepsilon + 2\alpha) - (d + 2\alpha) \\
&= -2(d + 2\alpha) - 2(\alpha - \omega) - (d + \mu_2 + \varepsilon + 2\alpha) - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) \\
&\quad +\beta\frac{\Lambda}{d} + (\alpha - \omega)\gamma\frac{\Lambda}{d} - 2(\alpha - \omega)\gamma\frac{\Lambda}{d} \\
&= -2(d + 2\alpha) - 2(\alpha - \omega) - (d + \mu_2 + \varepsilon + 2\alpha) - 2(\alpha - \omega)\gamma\frac{\Lambda}{d} \\
&\quad -(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)(1 - R_0)
\end{aligned}
$$

$$\det(A-B) = \begin{vmatrix} -(d+2\alpha) & -(\beta-\gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-(\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d}-K & 0 & 0 \\ 0 & \delta-\omega & -(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+2\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= -[(\beta-(\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d}-(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)-2(\alpha-\omega)]$$
$$(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)$$
$$= -(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(\beta+(\alpha-\omega)\gamma-2(\alpha-\omega)\gamma)\frac{\Lambda}{d}$$
$$+2(\alpha-\omega)(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)$$
$$+(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)$$
$$= (d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(1-R_{0\gamma})$$
$$+2(\alpha-\omega)\gamma\frac{\Lambda}{d}(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)$$
$$+2(\alpha-\omega)(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)$$

จะเห็นว่า $\mathrm{tr}(A-B) < 0$ และ $\det(A-B) > 0$ เมื่อ $R_{0\gamma} < 1$

นั่นคือ $\mathrm{tr}(A+B) < 0$, $\mathrm{tr}(A-B) < 0$, $\det(A+B) > 0$ และ $\det(A-B) > 0$ เมื่อ $R_{0\gamma} < 1$ ดังนั้น จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_{0\gamma} < 1$

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ แล้วระบบสมการ (3.1) จะมีจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*) เป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ จาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (3.35) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^*) คือ

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^* & A^* \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

เมื่อ

$$A^* = \begin{bmatrix} -(\beta I^*+d+\alpha) & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & \beta S^*-(d+\mu_1+\delta+\theta+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d+\mu_2+\varepsilon+\alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+\alpha) \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma\alpha I^* & -\gamma\alpha S^* & 0 & 0 \\ (\alpha-\omega)\gamma I^* & (\alpha-\omega)\gamma S^* + (\alpha-\omega) & 0 & 0 \\ 0 & a & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

พิจารณา $\det(J(P^*) - \lambda I) = \det(A^* + B^*) - \lambda I) \det(A^* - B^*) - \lambda I)$ จะได้

$$A^* + B^* = \begin{bmatrix} -(\beta+\gamma\alpha)I^* - (d+\alpha) & -(\beta+\gamma\alpha)S^* & 0 & 0 \\ (\beta + (\alpha-\omega)\gamma)I^* & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S^* - U^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta+\omega & -(d+\mu_2+\varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix}$$

$$(A^* - B^*) = \begin{bmatrix} U_1 & -(\beta-\gamma\alpha)S^* & 0 & 0 \\ (\beta-(\alpha-\omega)\gamma)I^* & U_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta-\omega & -(d+\alpha_2+\varepsilon+2\alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+2\alpha) \end{bmatrix}$$

เมื่อ $U^* = (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)$, $U_1 = -(\beta - \gamma\alpha)I^* - (d + 2\alpha)$ และ

$U_0 = (\beta - (\alpha - \omega)\gamma)S^* - (d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta) - 2(\alpha - \omega)$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A^* + B^*$

ถ้า $\det(A^* + B^*) > 0$ และ $\mathrm{tr}(A^* + B^*) < 0$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $A^* + B^*$ เป็นลบ จะได้

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A^* + B^*) &= -(\beta+\gamma\alpha)I^* - (d+\alpha) + (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S^* - (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) \\ &\quad -(d+\mu_2+\varepsilon) - d \\ &= -(\beta+\gamma\alpha)\frac{d}{\beta+\gamma\alpha}(R_{0\gamma}-1) + (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\frac{(d+\mu_1+a+\delta+\theta)}{\beta+\gamma\alpha} \\ &\quad -(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) - (d+\mu_2+\varepsilon) - d - (d+\alpha) \\ &= -d(R_{0\gamma}-1) - (d+\alpha) + (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) \\ &\quad -(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) - (d+\mu_2+\varepsilon) - d \\ &= -d(R_{0\gamma}-1) - (d+\alpha) - (d+\mu_2+\varepsilon) - d \end{aligned}$$

$$\det(A^* + B^*) = \begin{vmatrix} -(\beta+\gamma\alpha)I^* - (d+\alpha) & -(\beta+\gamma\alpha)S^* & 0 & 0 \\ (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)I^* & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S^* - U^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta+\omega & -(d+\mu_2+\varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{vmatrix}$$

$$= (-(\beta+\gamma\alpha)I^* - (d+\alpha))(((\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S^* - U^*d(d+\mu_2+\varepsilon))$$

$$+(\beta+\gamma\alpha)(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S^*I^*d(d+\mu_2+\varepsilon)$$

$$= d(R_{0\gamma}-1)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)d(d+\mu_2+\varepsilon)$$

จะเห็นว่า $\mathrm{tr}(A^*+B^*) < 0$ และ $\det(A^*+B^*) > 0$ เมื่อ $R_{0\gamma} > 1$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A^* - B^*$

ถ้า $\det(A^*-B^*) > 0$ และ $\mathrm{tr}(A^*-B^*) < 0$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ A^*-B^* เป็นลบ จะได้

$$\mathrm{tr}(A^*-B^*) = -(\beta-\gamma\alpha)I^* - (d+2\alpha) + (\beta-(\alpha-\omega)\gamma)S^* - (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)$$

$$-(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha) - (d+2\alpha) - 2(\alpha-\omega)$$

$$= -2(\alpha-\omega) - (d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha) - 2(d+2\alpha) - d\left(1-\frac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma\alpha}\right)(R_{0\gamma}-1)$$

$$-\frac{2(\alpha-\omega)\gamma(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)}{\beta+(\alpha-\omega)\gamma}$$

$$\det(A^*-B^*) = \begin{vmatrix} U_1 & -(\beta-\gamma\alpha)S^* & 0 & 0 \\ (\beta-(\alpha-\omega)\gamma)I^* & U_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta-\alpha & -(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+2\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= (-(\beta-\gamma\alpha)I^* - (d+2\alpha)][(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha))$$

$$((\beta-(\alpha-\omega)\gamma)S^* - (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) - 2(\alpha-\omega))$$

$$+(\beta-\gamma\alpha)(\beta-(\alpha-\omega)\gamma)S^*I^*(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha)$$

$$= d(R_{0\gamma}-1)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha)$$

$$+2(\alpha-\omega)d(R_{0\gamma}-1)(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha)$$

$$+2(d+2\alpha)(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(\Gamma_1-\Gamma_2)$$

เมื่อ $\Gamma_1 = (d+2\alpha)(\alpha-\omega)$ และ $\Gamma_2 = \dfrac{\gamma\alpha d(R_{0\gamma}-1)}{\beta+\gamma\alpha}((d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)+2(\alpha-\omega))$

จะเห็นว่า $\mathrm{tr}(A^*-B^*) < 0$ ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ และ $\det(A^*-B^*) > 0$ ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ และ $\Gamma_1 > \Gamma_2$

นั่นคือ ค่าลักษณะเฉพาะของ A^*-B^* จะมีค่าเป็นลบ ถ้า $\mathrm{tr}(A^*-B^*) < 0$ เมื่อ $R_{0\gamma} > 1$ และ

$\det(A^* - B^*) > 0$ เมื่อ $R_{0\gamma} > 1$ และ $\Gamma_1 > \Gamma_2$

ดังนั้น จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ และ $\Gamma_1 > \Gamma_2$

บทที่ 4

ผลการศึกษา

เนื่องจากแบบจำลองที่พัฒนาได้ สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ดังระบบสมการที่ (3.1) และ (3.2) สามารถวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองได้ โดยคำนวณผลเชิงตัวเลขร่วมกับค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ (4.1) โดยแสดงผลในรูปของกราฟ ในการวิเคราะห์ครั้งนี้ได้ทำการตรวจสอบเสถียรภาพของแบบจำลอง ภายใต้เงื่อนไขค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่งและน้อยกว่าหนึ่ง โดยเปลี่ยนแปลงอัตราการแพร่กระจายของโรค (β) เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว

ตารางที่ 4.1 ความหมายและค่าของพารามิเตอร์

พารามิเตอร์	ความหมาย	ค่า
Λ	อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน	3
β	อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมือง	Vary
ω	อัตราการคัดแยกประชากรที่สำเร็จจากเมือง i ไปเมือง j	0.1
γ	อัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j	0.09
α	อัตราการเดินทางออกจากเมือง โดยที่ $\alpha - \omega > 0$	0.9
μ_1	อัตราการตายด้วยโรคของประชากรกลุ่ม I	0.01
μ_2	อัตราการตายด้วยโรคของประชากรกลุ่ม Q	0.01
δ	อัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อ	0.5
ε	อัตราการหายจากการเป็นโรค เนื่องจากถูกกักกันบริเวณจากการติดเชื้อ	0.2
θ	อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการเป็นโรค	1.5
d	อัตราการตายตามธรรมชาติ	0.15

4.1 ผลเชิงตัวเลขกรณีประชากรไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง

4.1.1 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง

พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) กำหนดให้ $\beta = 0.005$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานดังนี้ $E^0(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0) = E^0(20, 0, 0, 0)$ และ $R_0 = 0.05 < 1$

เมื่อพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้ว่า $\lambda_1 = -2.06$, $\lambda_2 = -0.36$ และ $\lambda_3 = \lambda_4 = -0.15$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.1 สรุปได้ว่า จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0 < 1$

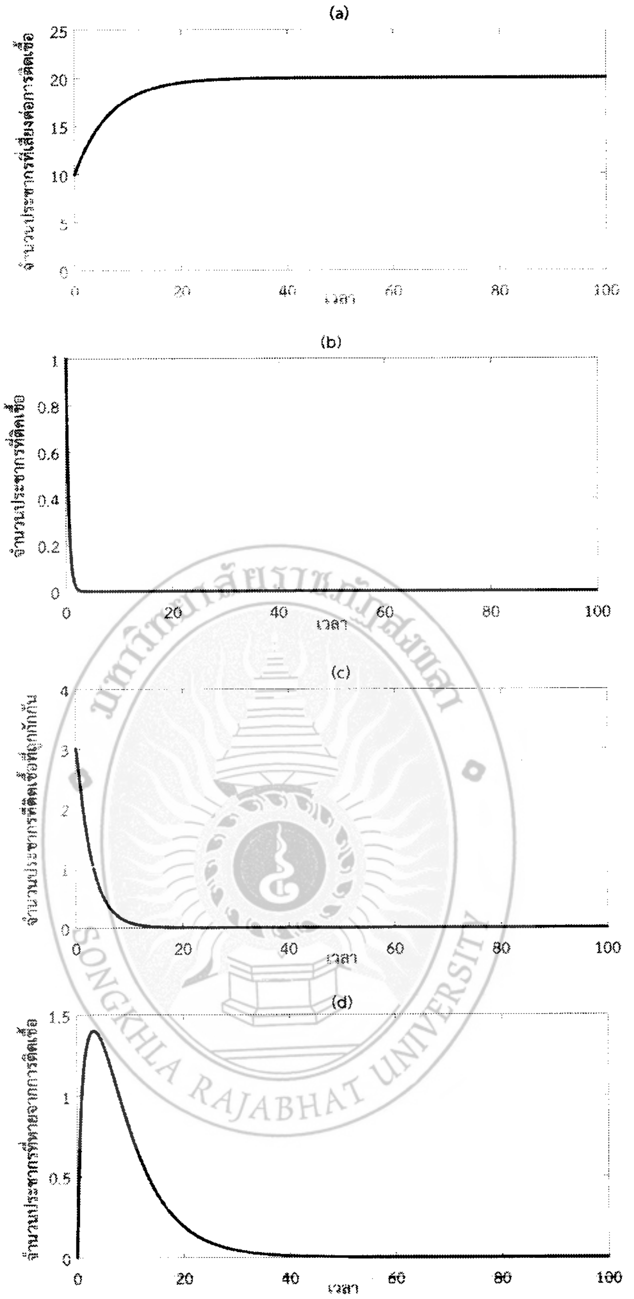
พิจารณาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองโดยใช้โปรแกรม ซึ่งจะแสดงผลในรูปของกราฟ แสดงดังรูปที่ 4.1 จะเห็นว่า กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Q) และกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (R) ลู่เข้าสู่จุด (20, 0, 0, 0) ตามลำดับ นั่นคือ การระบาดของโรคลดลงหรือไม่มีการแพร่ระบาดของโรคในอาณาบริเวณที่ศึกษา

4.1.2 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง

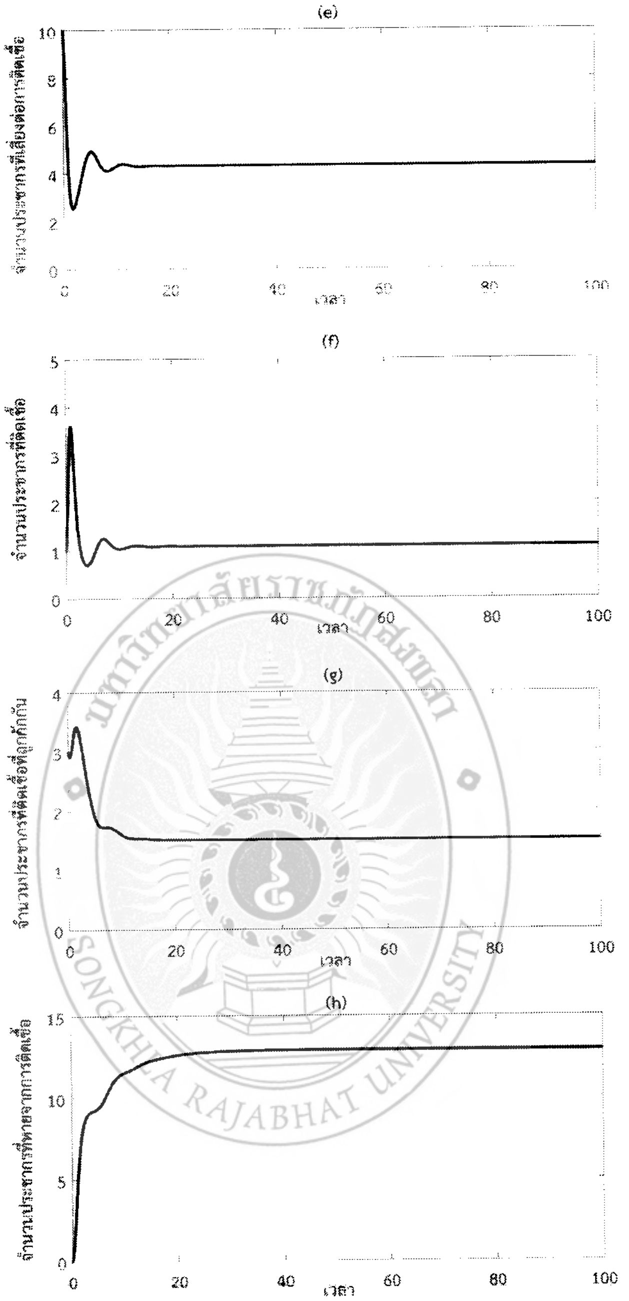
พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) กำหนดให้ $\beta = 0.5$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน คือ (4.32, 1.09, 1.51, 12.91) และ 4.63 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้ว่า $\lambda_1 = -0.36$, $\lambda_2 = -0.15$ และ $\lambda_3 = \lambda_4 = -0.15 \pm 2.05i$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.2 สรุปได้ว่าจุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0 > 1$ เมื่อพิจารณาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองจะพบว่า แบบจำลอง (2) จะลู่เข้าจุดสมดุลที่โรคคงอยู่

นั่นคือ โรคมีโอกาสกลับมาระบาดอีกครั้ง เนื่องจากจำนวนเฉลี่ยการติดเชื้อต่อเนื่องจากผู้ป่วยแต่ละคนมีจำนวนเพิ่มขึ้นเพียงพอที่จะทำให้บริเวณที่ ศึกษาเกิดการระบาดของโรคอีกครั้ง โดยแสดงดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.1 ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง 3.2 เมื่อ $\beta = 0.005$ จะได้ $R_0 < 1$



รูปที่ 4.2 ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง 3.2 เมื่อ $\beta = 0.5$ จะได้ $R_0 > 1$

4.2 ผลเชิงตัวเลขกรณีประชากรมีการเดินทางระหว่างเมืองสองเมือง

4.2.1 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง

พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P_0) กำหนดให้ $\beta = 0.005$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานดังนี้ $P_0(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0) = P^0(20, 0, 0, 0, 20, 0, 0, 0)$ และ $R_{0\gamma} = 0.68 < 1$

เมื่อพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้ว่า $\lambda_1 = -5.38$, $\lambda_2 = -2.16$, $\lambda_3 = -1.9505$, $\lambda_4 = -1.9495$, $\lambda_5 = -0.54$, $\lambda_6 = -0.36$ และ $\lambda_7 = \lambda_8 = -0.15$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.3 สรุปได้ว่า จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_{0\gamma} < 1$

เมื่อพิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลอง จะเห็นว่า กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_γ) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_γ) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Q_γ) และกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (R_γ) เมื่อ $\gamma = 1, 2$ ลู่เข้าสู่จุด(20, 0, 0, 0, 20, 0, 0, 0) นั่นคือ การระบาดของโรคลดลงหรือไม่มีการแพร่ระบาดของโรคในอาณาบริเวณที่ศึกษา ซึ่งจะแสดงผลในรูปของกราฟ แสดงดังรูปที่ 4.3

4.2.1 ผลเชิงตัวเลขเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง

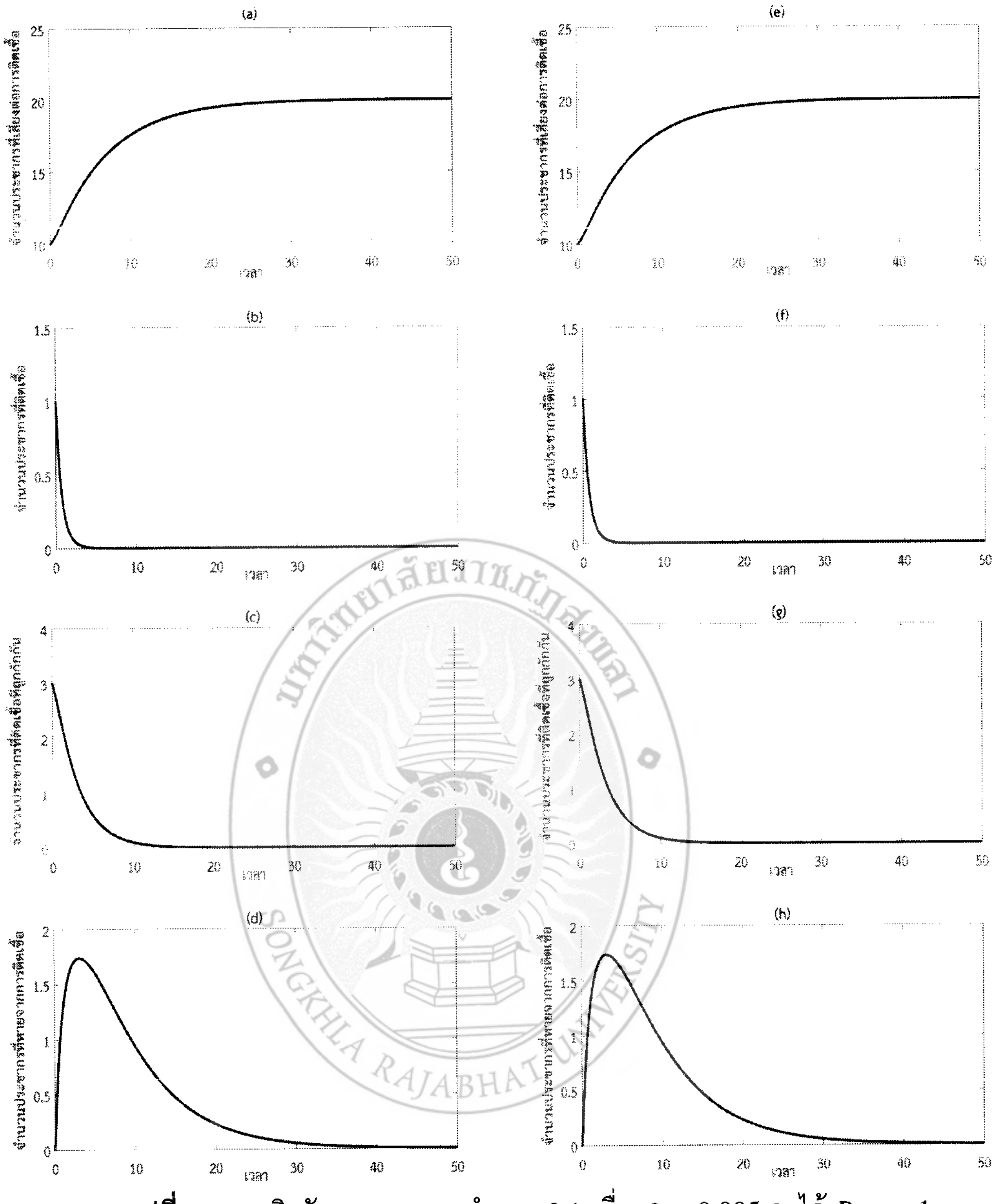
พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^*) กำหนดให้ $\beta - 0.5$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานดังนี้

$P^*(S^*_\gamma, I^*_\gamma, Q^*_\gamma, R^*_\gamma, S^*_\gamma, I^*_\gamma, Q^*_\gamma, R^*_\gamma) = P^*(3.95, 1.05, 1.75, 12.82, 3.95, 1.05, 1.75, 12.82)$

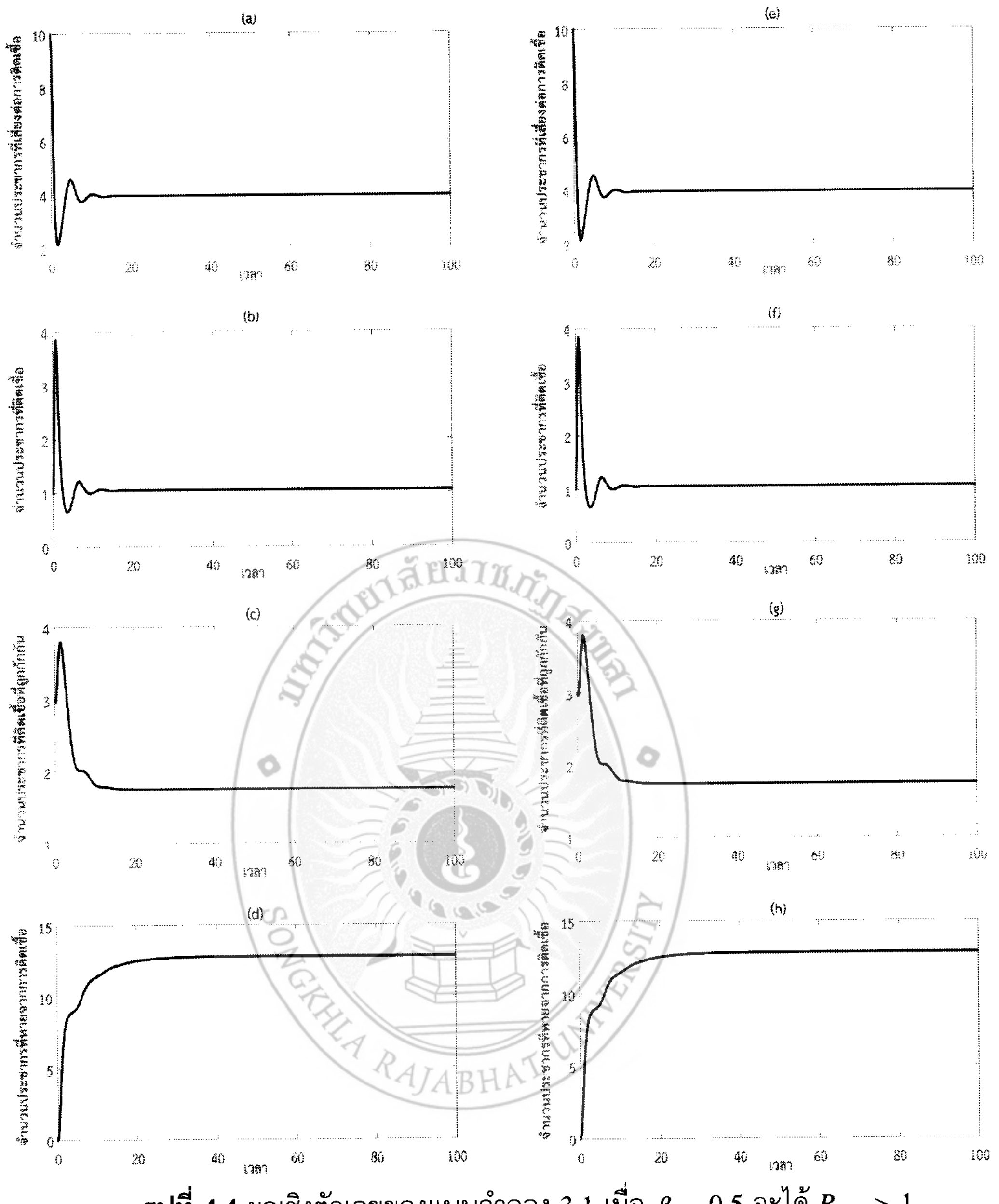
และ $R_{0\gamma} = 5.06 > 1$

เมื่อพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้ว่า $\lambda_1 = -2.16$, $\lambda_2 = -1.95$, $\lambda_3 = -0.36$, $\lambda_4 = -0.15$, $\lambda_5, \lambda_6 = -1.80 \pm 1.70i$ และ $\lambda_7 = \lambda_8 = -0.14 \pm 2.23i$ ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.4 สรุปได้ว่า จุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ เมื่อพิจารณาผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง จะพบว่าแบบจำลอง (1) จะลู่เข้าจุดสมดุลที่โรคคงอยู่

นั่นคือโรคมีโอกาสกลับมาระบาดอีกครั้ง เนื่องจากจำนวนเฉลี่ยการติดเชื้อต่อเนื่องจากผู้ป่วยแต่ละคนมีจำนวนเพิ่มขึ้นเพียงพอที่จะทำให้บริเวณที่ ศึกษาเกิดการระบาดของโรคอีกครั้งแสดงดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.3 ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง 3.1 เมื่อ $\beta = 0.005$ จะได้ $R_{0_\gamma} < 1$

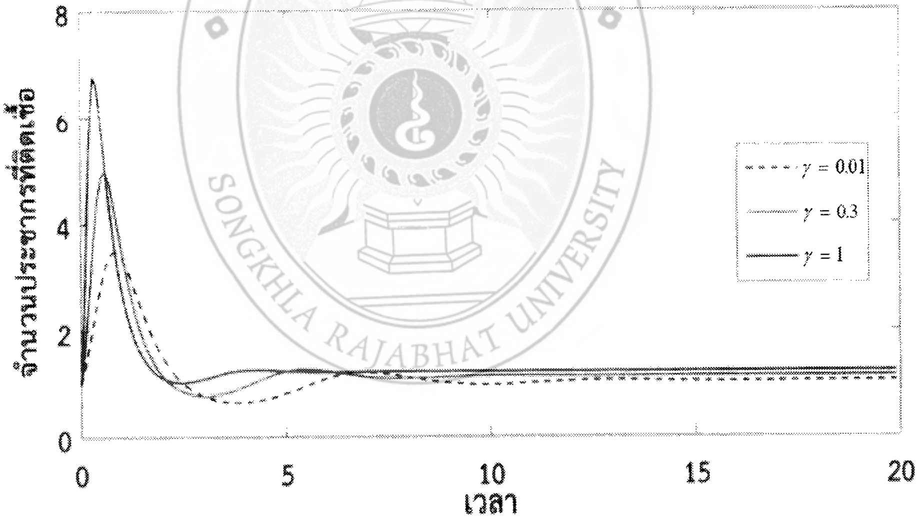


รูปที่ 4.4 ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง 3.1 เมื่อ $\beta = 0.5$ จะได้ $R_{0\gamma} > 1$

ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าระดับการติดเชื้อ และอัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j

อัตราการแพร่กระจายของโรค จากเมือง i ไปเมือง j (γ)	ค่าระดับการติดเชื้อ ($R_{0\gamma}$)
0.01	1.0301
0.3	1.0809
1	1.1255

จากตาราง 4.2 จะเห็นว่าอัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j (γ) จะแปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน ($R_{0\gamma}$) กล่าวคือ การลดอัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j จะทำให้ค่าระดับการติดเชื้อลดลง เมื่อค่าระดับการติดเชื้อลดลงจะส่งผลให้ประชากรที่ติดเชื้อลดลงด้วย แสดงดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 แสดงจำนวนผู้ที่ติดเชื้อเมื่อลดอัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยในครั้งนี้ได้ศึกษาและพัฒนาแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ระหว่างเมืองสองเมือง ในรูปแบบจำลอง $SIQR$ แบ่งกลุ่มประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กลุ่มที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I) กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก (Q) และกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (R) สามารถเขียนให้อยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

เมืองที่ 1

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= \Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma \alpha S_2 I_2 \\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 I_1 + (\alpha - \omega) I_2 - (d + \mu_1 + \alpha + \delta + \theta) I_1 + (\alpha - \omega)\gamma S_2 I_2 \\
\frac{dQ_1}{dt} &= \delta I_1 - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_1 - \alpha Q_1 + \alpha Q_2 + \omega I_2 \\
\frac{dR_1}{dt} &= \varepsilon Q_1 - dR_1 + \theta I_1 - \alpha R_1 + \alpha R_2
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

เมืองที่ 2

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_2}{dt} &= \Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma \alpha S_1 I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 I_2 + (\alpha - \omega) I_1 - (d + \mu_1 + \alpha + \delta + \theta) I_2 + (\alpha - \omega)\gamma S_1 I_1 \\
\frac{dQ_2}{dt} &= \delta I_2 - (d + \mu_2 + \varepsilon) Q_2 - \alpha Q_2 + \alpha Q_1 + \omega I_1 \\
\frac{dR_2}{dt} &= \varepsilon Q_2 - dR_2 + \theta I_2 - \alpha R_2 + \alpha R_1
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

เมื่อพิจารณาแบบจำลองที่ไม่มีการเดินทางระหว่างเมืองสองเมือง นั่นคือ $\alpha = \omega = 0$ แล้ว สมการ (5.1) และ (5.2) สามารถเขียนแบบจำลองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - dS \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (d + \mu_1 + \delta + \theta)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (d + \mu_2 + \varepsilon)Q \\ \frac{dR}{dt} &= \varepsilon Q - dR + \theta I \end{aligned} \tag{5.3}$$

หาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของแบบจำลองการระบาดโดยใช้วิธีรุ่นถัดไป จะได้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของสมการ (5.3) คือ

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{d(d + \mu_1 + \delta + \theta)}$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (5.3) มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค $(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0)$ และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (S^*, I^*, Q^*, R^*) ตามลำดับ จุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0 < 1$ และจุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพ ถ้า $R_0 > 1$ ซึ่งผลเชิงตัวเลขกับผลทางทฤษฎีมีความสอดคล้องกัน ดังทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 และผลเฉลยเชิงตัวเลขในรูปที่ 4.1 และ รูปที่ 4.2

เมื่อทุกกลุ่มประชากร มีการเดินทางระหว่างเมืองสองเมือง จากการวิเคราะห์แบบจำลองของสมการ (5.1) และ (5.2) จะได้ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของแบบจำลอง คือ

$$R_{0\gamma} = \frac{(\beta + (\alpha - \omega)\gamma)\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)}$$

จากการวิเคราะห์เสถียรภาพ ทฤษฎีบท 3.3 และ ทฤษฎีบท 3.4 แสดงว่าจุดสมดุลที่อิสระจากโรคมีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ เมื่อ $R_{0\gamma} < 1$ และ ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่มีเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ผลเชิงตัวเลขแสดงดัง รูปที่ 4.3 และ รูปที่ 4.4

เมื่อเปรียบเทียบ R_0 และ $R_{0\gamma}$ จะเห็นว่า $R_{0\gamma} > R_0$ สำหรับ $\gamma > 0$ หมายความว่า $R_{0\gamma}$ เพิ่มขึ้นเมื่อ γ เพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\frac{\partial R_{0\gamma}}{\partial \gamma} = \frac{(\alpha - \omega)\Lambda}{d(d + \mu_1 + \omega + \delta + \theta)} > 0$$

แสดงว่าอัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง (γ) แปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน $(R_{0\gamma})$ นั่นคือหากลดอัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ก็จะส่งผลให้จำนวนผู้ที่ติดเชื้อลดลง

พิจารณาจุดที่โรคคงอยู่ $P_\gamma^*(S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*, S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*)$ เมื่อเกิดโรคระบาดในทั้งสองเมือง จะเห็นว่า

$$\frac{\partial S_\gamma}{\partial \gamma} < 0, \frac{\partial I_\gamma}{\partial \gamma} > 0, \frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} > 0, \frac{\partial R_\gamma}{\partial \gamma} > 0 \tag{5.4}$$

กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ลดลงเมื่อ γ เพิ่มขึ้น ในทางกลับกัน เมื่อ γ เพิ่มขึ้น จะทำให้กลุ่มที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก และกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อ เพิ่มขึ้นด้วย

5.2 ข้อเสนอแนะ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีประโยชน์อย่างยิ่งในด้านควบคุมการระบาดของโรค ซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่สามารถพยากรณ์จำนวนผู้ที่ติดเชื้อและช่วงระยะเวลาการระบาดทำให้สามารถวางแผนป้องกันและควบคุมโรคเพื่อลดจำนวนผู้ติดเชื้อ แต่งานวิจัยในครั้งนี้ยังขาดการศึกษาที่นำแบบจำลองไปประยุกต์ใช้กับโรคที่เกิดขึ้นจริง โดยการนำพารามิเตอร์และปัจจัยต่างๆที่เกี่ยวกับโรคที่ทำ-การศึกษามาประยุกต์ใช้กับแบบจำลองที่พัฒนาได้

ภาคผนวก

PROCEEDINGS

มศว ครั้งที่ วิจัย 12

การประชุมวิชาการระดับชาติ

ISBN : 978-616-296-186-1

20 - 21 มีนาคม 2562

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

QR Code

SWURES12-082 แบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

EPIDEMIC MODEL OF QUARANTINE WITH TRANSPORT-RELATED INFECTION

*ณัฐธนาภรณ์ รักษ์เกลี้ยง สมฤทัย หอมวงศ์ อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหน่อง**

***Nattanaporn Rakkeang**, Somruthai Homwong, Adisak Denphetnong**

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา จังหวัดสงขลา

Faculty of Science and Technology, Songkhla Rajabhat University, Songkhla

***Corresponding author, E-mail:** adisak.de@skru.ac.th*

บทคัดย่อ

การเดินทางเป็นปัจจัยสำคัญอย่างหนึ่งที่สำคัญต่อการระบาดของโรค งานวิจัยนี้ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางระหว่างเมืองสองเมือง โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่มคือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก และกลุ่มที่หายจากการติดเชื้อ แบบจำลองนี้มีจุดสมดุล 2 จุด คือ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค และ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ นอกจากนี้ยังศึกษาค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน โดยวิธีแมทริกซ์รุ่นถัดไป และพบว่าจุดสมดุลที่อิสระจากโรคเป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง ในทางกลับกันหากค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง จุดสมดุลที่โรคคงอยู่เป็นจุดที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

คำสำคัญ: การติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง แบบจำลองการระบาด *SIQR* ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน เสถียรภาพ

Abstract

Transportation among cities is considered as one of the main factors which affect the outbreak of diseases. This research aims to study the mathematical models of quarantine with transport-related infection between two cities. The population is divided into 4 groups: susceptible, infected, quarantined and recovered. The model exhibits two equilibriums: disease-free and endemic equilibriums. Furthermore, the basic reproduction number is obtained by using the next generation matrix. The result indicates that disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when its corresponding reproduction number is less then unity. On the contrary, basic reproduction number is greater than unity, the endemic equilibrium is locally asymptotically stable.

Keyword: Transport-related infection, *SIQR* epidemic model, Basic reproduction number, Stability

บทนำ

ในปัจจุบันมีโรคระบาดเกิดขึ้นมากมายและมีการลุกลามอย่างรวดเร็ว ทุกครั้งที่เกิดการระบาดของโรคมักไม่มีสัญญาณเตือนล่วงหน้าและไม่สามารถคาดเดาถึงขอบเขตการกระบาดได้ ปัจจัยเสี่ยงที่ทำให้มีการระบาดของโรค คือ การเพิ่มขึ้นของประชากรและการขยายตัวของเขตนาคร การเดินทางข้ามประเทศเป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้เกิดการระบาดของโรค ส่งผลให้โรคแพร่กระจายเป็นบริเวณกว้าง องค์การการท่องเที่ยวสากล ระบุว่าแต่ละปีมีคนเดินทางระหว่างประเทศกว่า 1,000 ล้านคน ซึ่งหมายความว่าเชื้อโรคมีโอกาสถ่ายทอดจากประเทศหนึ่งไปยังอีกประเทศหนึ่งได้อย่างง่ายดาย เช่น การระบาดของโรคซาร์สเมื่อปี ค.ศ. 2003 ที่ทำให้มีผู้ติดเชื้อกว่า 8,000 คน ในกว่า 30 ประเทศทั่วโลก และเชื้อไวรัสซิก้า ที่มีรายงานผู้ติดเชื้อมากกว่า 84 ประเทศเมื่อปี พ.ศ. 2559 [1] ปัจจุบันไม่มีการตรวจคัดกรองในเรื่องโรคติดเชื้อ แต่ในขณะมีโรคระบาด และมีผู้สัมผัสโรค อาจมีการแยกผู้สัมผัสโรคให้อยู่ในสถานที่เฉพาะ จนกว่าจะผ่านระยะฟักตัวของโรค ที่เรียกว่า "การกักกันโรคหรือคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อ (Quarantine)" เพื่อเป็นการป้องกันการแพร่กระจายของโรค การควบคุมการระบาดของโรคเป็นสิ่งสำคัญในการป้องกันไม่ให้มีการระบาดของโรคออกไปอย่างกว้างขวาง เพื่อเป็นการลดพื้นที่เสี่ยงจากการติดเชื้อ ซึ่งการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรค เป็นอีกหนึ่งวิธีที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคได้ เนื่องจากสามารถพยากรณ์จำนวนผู้ติดเชื้อและช่วงเวลาของการระบาด

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคเริ่มคิดค้นตั้งแต่ปี 1927 โดย เคอร์มาคและแมคเคนดริค [2] และมีการพัฒนาแบบจำลองการระบาดเรื่อยมา สำหรับแบบจำลองการระบาดที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางมีผู้พัฒนามาอย่างต่อเนื่อง จินอิง ซุย และคณะ [3] ได้สร้างแบบจำลองการระบาด *SIS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางโดยแบ่งประชากรออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อและกลุ่มติดเชื้อ โดยประชากร 2 กลุ่มนี้มีการเดินทางระหว่างเมือง อุยวาน และ จินอิง ซุย [4] ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาด *SEIS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่อยู่ในระยะฟักตัว ลุยและทาคิวชิ [5] ได้สร้างแบบจำลองการระบาด *SIQS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่มีการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อ อดิศักดิ์ เด็นเพ็ชรหน่อง และคณะ [6] ได้พัฒนาแบบจำลองการระบาด *SEIRS* ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยมีการเพิ่มกลุ่มประชากรที่หายจากการติดเชื้อ เนอร์วานี และคณะ [7] ได้ศึกษาแบบจำลองการระบาด *SIQR* พบว่า $R_0 < 1$ จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E_0) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ และ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดที่มีเสถียรภาพ

งานวิจัยในครั้งนี้ได้พัฒนาแบบจำลองของ เนอร์วานี และคณะ [7] โดยได้ศึกษาแบบจำลองการระบาด *SIQR* ที่ไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง โดยพัฒนาเป็นแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองและคำนวณผลเชิงตัวเลขของแบบจำลอง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

2. วิเคราะห์เสถียรภาพทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับการระบาดของโรคสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

3. คำนวณผลเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

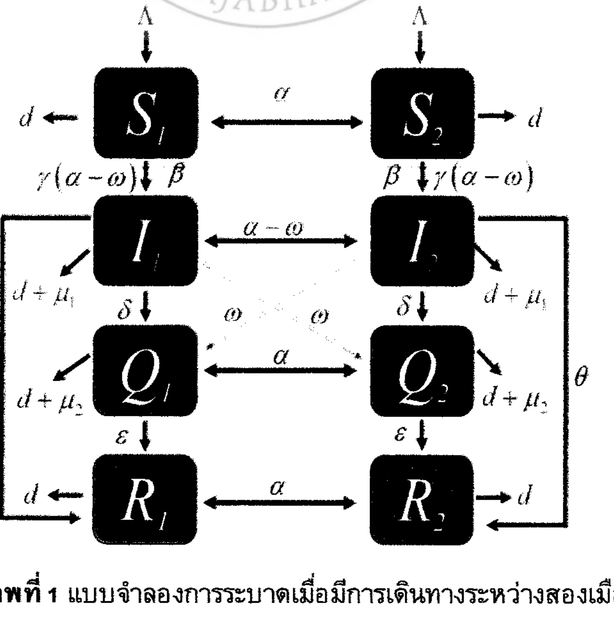
วิธีดำเนินการวิจัย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยครั้งนี้พัฒนาแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ซึ่งแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่มดังนี้ S_i แทนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ I_i แทนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ Q_i แทนประชากรที่ติดเชื้อที่ถูกกักกันหรือคัดแยก และ R_i แทนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ ในเมือง $i, i = 1,2$ และสมมติฐานของแบบจำลองมีดังนี้

- ทั้งสองเมืองมีลักษณะที่เหมือนกัน
- ประชากรที่เดินทางไม่มีการคลอดและการเสียชีวิตระหว่างการเดินทาง
- ประชากรที่ติดเชื้อไม่หายจากการเป็นโรคระหว่างการเดินทาง
- ประชากรที่ติดเชื้อไม่ติดเชื้อตั้งแต่แรกเกิด
- ประชากรที่ติดเชื้อแล้วสามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้ทันที
- ประชากรที่ติดเชื้อและได้รับการคัดแยกออก ไม่สามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้
- อายุและเพศไม่ได้เป็นปัจจัยสำคัญต่อการติดเชื้อของโรค
- อัตราการตายตามธรรมชาติ เท่ากันทุกกลุ่มประชากร
- พารามิเตอร์และอัตราต่างๆไม่เป็นจำนวนลบ
- อัตราการเดินทางออกจากเมือง มากกว่า อัตราการคัดแยกประชากรที่สำเร็จ จากเมือง i ไปเมือง j $(\alpha > \omega)$ เมื่อ α คือ อัตราการเดินทางออกจากเมือง และ ω คือ อัตราการคัดแยกประชากรที่สำเร็จจากเมือง i ไปเมือง j นั่นคือ $\alpha - \omega$ คือการคัดแยกประชากรที่ไม่สำเร็จ
- โรคจะส่งผ่านด้วยอัตราอุบัติการณ์ (นั่นคืออัตราผู้ติดเชื้อรายใหม่) $\beta S_j I_j$ ภายในเมือง j เมื่อ $j = 1,2$ อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมืองเป็นค่าคงที่ β
- เมื่อประชากรในเมือง j เดินทางไปยังเมือง i โรคจะถูกส่งด้วยอัตราอุบัติการณ์ $\gamma\alpha S_j I_j; (j = 1,2)$ เมื่อ γ อัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง

การเปลี่ยนแปลงของแต่ละกลุ่มประชากร แสดงในภาพที่ 1 และพารามิเตอร์และความหมายแสดงในตารางที่ 1



ภาพที่ 1 แบบจำลองการระบาดเมื่อมีการเดินทางระหว่างสองเมือง

จากภาพที่ 1 และสมมติฐานข้างต้นจะได้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางอยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= \Lambda - \beta S_1 I_1 - dS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \gamma\alpha S_2 I_2 \\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 I_1 + (\alpha-\omega) I_2 - (d+\mu_1+\delta+\theta+\alpha) I_1 + (\alpha-\omega)\gamma S_2 I_2 \\
\frac{dQ_1}{dt} &= \delta I_1 - (d+\mu_2+\varepsilon) Q_1 - \alpha Q_1 + \alpha Q_2 + \omega I_2 \\
\frac{dR_1}{dt} &= \varepsilon Q_1 - dR_1 + \theta I_1 - \alpha R_1 + \alpha R_2 \\
\frac{dS_2}{dt} &= \Lambda - \beta S_2 I_2 - dS_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \gamma\alpha S_1 I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 I_2 + (\alpha-\omega) I_1 - (\alpha-\omega) I_2 - (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) I_2 + (\alpha-\omega)\gamma S_1 I_1 \\
\frac{dQ_2}{dt} &= \delta I_2 - (d+\mu_2+\varepsilon) Q_2 - \alpha Q_2 + \alpha Q_1 + \omega I_1 \\
\frac{dR_2}{dt} &= \varepsilon Q_2 - dR_2 + \theta I_2 - \alpha R_2 + \alpha R_1
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ และความหมาย

พารามิเตอร์	**ความหมาย**	**ค่า**
Λ	อัตราการเกิดหรือการย้ายถิ่นฐาน	3
β	อัตราการแพร่กระจายของโรคภายในเมือง	vary
ω	อัตราการคัดแยกประชากรที่สำเร็จจากเมือง i ไปเมือง j	0.1
γ	อัตราการแพร่กระจายของโรคจากเมือง i ไปเมือง j	0.09
α	อัตราการเดินทางออกจากเมือง โดยที่ $\alpha - \omega > 0$	0.9
μ_1	อัตราการตายด้วยโรคของประชากรกลุ่ม I	0.01
μ_2	อัตราการตายด้วยโรคของประชากรกลุ่ม Q	0.01
δ	อัตราการคัดแยกจากการติดเชื้อ	0.5
ε	อัตราการหายจากการเป็นโรค เนื่องจากถูกกักกันบริเวณจากการติดเชื้อ	0.2
θ	อัตราผู้ติดเชื้อที่หายจากการเป็นโรค	1.5
d	อัตราการตายตามธรรมชาติ	1.15

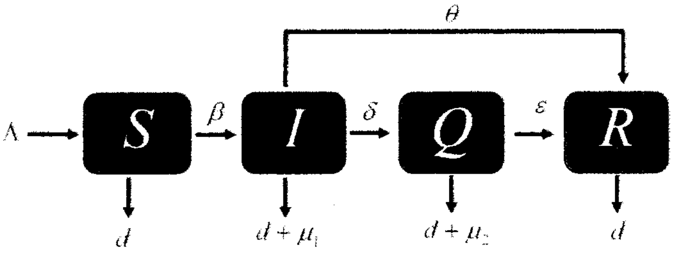
ที่มา: Nidhi Nirwani, V.H. Badshah and R. Khandelwal (2016). Dynamical Study of an SIQR Model with Saturated Incidence Rate. *Nonlineae Analysis and Differential Equations.* pp. 43-50.

วิเคราะห์แบบจำลอง

ในการวิเคราะห์แบบจำลองเราจะทำการพิจารณา 2 กรณี คือ กรณีที่ไม่มีการเดินทางของประชากร และกรณีมีการเดินทางของประชากรระหว่างสองเมือง

1. **ประชากรไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง**

ถ้าเราไม่พิจารณาการเดินทางของประชากร นั่นคือ $\alpha = \omega = 0$ แล้วสมการ (1) สามารถเขียนได้เป็นแบบจำลอง $SIQR$ ดังนี้



ภาพที่ 2 แบบจำลองการระบาดเมื่อ [illegible] $(\alpha = \omega = 0)$

จากภาพที่ 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - dS, & \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (d + \mu_2 + \varepsilon)Q \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (d + \mu_1 + \delta + \theta)I, & \frac{dR}{dt} &= \varepsilon Q - dR + \theta I \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

กำหนดให้ $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ จะได้จุดสมดุล 2 จุด คือ

1) $E^0 = (S^0, I^0, Q^0, R^0) = \left(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0\right)$ เรียกจุดสมดุลนี้ว่า **จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (Disease-free equilibrium)**

จากแนวคิดของเมทริกซ์รุ่นถัดไป (Next generation matrix) และค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานที่แสดงใน เวนเดนและวัตเมาร์ [8] เรากำหนดให้ $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta S^0 \end{bmatrix}$ และ $V = \begin{bmatrix} d & \beta S^0 \\ 0 & (d + \mu_1 + \delta + \theta) \end{bmatrix}$ ดังนั้นค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานคือ

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta \Lambda}{d(d + \mu_1 + \delta + \theta)}$$

เมื่อ $\rho(FV^{-1})$ ถูกกำหนดให้เป็นรัศมีสเปกตรัม (spectral radius) ของเมทริกซ์ FV^{-1}

ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานของโรค คือ ดัชนีวัดจำนวนเฉลี่ยผู้ติดเชื้อต่อมาจากผู้ป่วยแต่ละคน หรือค่า R_0 [9] ค่าดัชนีสำหรับการแพร่ระบาดจะอิงกับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อครั้งแรกที่มีความสัมพันธ์กันทางสังคมกับประชากรในกลุ่มเสี่ยง

2) $E^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$ เรียกจุดสมดุลนี้ว่า **จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (Endemic equilibrium)**

เมื่อ $S^* = \frac{d + \mu_1 + \delta + \theta}{\beta}$, $I^* = \frac{d}{\beta}\left(R_0 - 1\right)$, $Q^* = \frac{\delta I^*}{(d + \mu_2 + \varepsilon)}$, $R^* = \frac{(\varepsilon\delta + \theta(d + \mu_2 + \varepsilon))I^*}{(d + \mu_2 + \varepsilon)}$

และ $R_0 > 1$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลองของสมการ (2) คือ

$$J(E)=\begin{bmatrix} -\beta I-d & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta I & \beta S-(d+\mu_1+\delta+\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d+\mu_2+\varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $R_0<1$ แล้วจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ จาก จินอิง ซุย และคณะ [3] ถ้า $\det(J(E^0))>0$ และ $tr(J(E^0))<0$ จะให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^0)$ มีค่าเป็นลบ เมื่อพิจารณา ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) จะได้

$$tr(J(E^0))=-2d-(d+\mu_2+\varepsilon)-(d+\mu_1+\delta+\theta)(1-R_0),$$

$$\det(J(E^0))=d^2(d+\mu_2+\varepsilon)(d+\mu_1+\delta+\theta)(1-R_0)$$

จะเห็นได้ว่า $tr(J(E^0))<0$ และ $\det(J(E^0))>0$ เมื่อ $R_0<1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^0)$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) เป็นจุดที่เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0<1$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $R_0>1$ แล้วจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (3) ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) ถ้า $\det(J(E^*))>0$ และ $tr(J(E^*))<0$ จะให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^*)$ มีค่าเป็นลบ จะได้

$$tr(J(E^*))=-d(R_0-1)-(d+\mu_2+\varepsilon)-2d,$$

$$\det(J(E^*))=d^2(R_0-1)(d+\mu_2+\varepsilon)(d+\mu_1+\delta+\theta)$$

จะเห็นได้ว่า $tr(J(E^*))<0$ และ $\det(J(E^*))>0$ เมื่อ $R_0>1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ $J(E^*)$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_0>1$

2. ประชากรมีการเดินทางระหว่างสองเมือง

กำหนดให้ $\frac{dS_1}{dt}=\frac{dI_1}{dt}=\frac{dQ_1}{dt}=\frac{dR_1}{dt}=\frac{dS_2}{dt}=\frac{dI_2}{dt}=\frac{dQ_2}{dt}=\frac{dR_2}{dt}=0$ จะได้จุดสมดุล 2 จุด คือ

1) $P^0=(S_1{}^0,I_1{}^0,Q_1{}^0,R_1{}^0,S_2{}^0,I_2{}^0,Q_2{}^0,R_2{}^0)=\left(\frac{\Lambda}{d},0,0,0,\frac{\Lambda}{d},0,0,0\right)$ เรียกจุดสมดุลนี้ว่า **จุดสมดุลที่อิสระจากโรค**

จากแนวคิดเมทริกซ์รุ่นถัดไป ค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน กำหนดให้

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)I^0 & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S^0 \end{bmatrix} \text{ และ } V=\begin{bmatrix} d & (\beta+\gamma\alpha)\frac{\Lambda}{d} \\ 0 & (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน คือ $R_{0\gamma}=\rho(\mathrm{FV}^{-1})=\frac{(\beta+(\alpha-\omega)\gamma)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)}$

2) $P_\gamma^* = (S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*, S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*)$ เรียกจุดสมดุลนี้ว่า **จุดสมดุลที่โรคคงอยู่**

เมื่อ $S_\gamma^* = \dfrac{d+\mu_1+\omega+\delta+\theta}{\beta+(\alpha-\omega)\gamma}$, $I_\gamma^* = \dfrac{d}{\beta+\gamma\alpha}(R_{0\gamma}-1)$, $Q_\gamma^* = \dfrac{(\delta+\omega)I_\gamma^*}{d+\mu_2+\varepsilon}$,

$R_{0\gamma} = \dfrac{(\varepsilon(\delta+\omega)+\theta(d+\mu_2+\varepsilon))I_\gamma^*}{d\left(d+\mu_2+\varepsilon\right)}$ และ $R_{0\gamma} > 1$

จาโคเบียนเมทริกซ์ของแบบจำลองของสมการ (1) คือ

$$J(P) = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

เมื่อ

$$A_i = \begin{bmatrix} -(\beta I_i + d + \alpha) & -\beta S_i & 0 & 0 \\ \beta I_i & \beta S_i - (d+\mu_1+\omega+\delta+\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(d+\mu_2+\varepsilon) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+\alpha) \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \alpha-\gamma\alpha I_i & -\gamma\alpha S_i & 0 & 0 \\ (\alpha-\omega)\gamma I_i & (\alpha-\omega)\gamma S_i + (\alpha-\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \omega & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}; i = 1, 2$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้

$$\det(J(P-\lambda I)) = \begin{vmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (A-B)-\lambda I & B \\ 0 & (A+B)-\lambda I \end{vmatrix}$$

$$= \det(A+B-\lambda I)\det(A-B-\lambda I)$$

จากสมการ (4) จะได้แมทริกซ์ $A+B$ และ $A-B$ ดังนี้

$$A+B = \begin{bmatrix} -(\beta+\gamma\alpha)I-d & -(\beta+\gamma\alpha)S & 0 & 0 \\ (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)I & (\beta+(\alpha-\omega)\gamma)S-U^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta+\omega & -(d+\mu_2+\varepsilon)+\alpha & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -d \end{bmatrix},$$

$$A-B = \begin{bmatrix} -(\beta I-\gamma\alpha)I-(d+2\alpha) & -(\beta-\gamma\alpha)S & 0 & 0 \\ (\beta-(\alpha-\omega)\gamma)I & U_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta+\omega & -(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha) & 0 \\ 0 & \theta & \varepsilon & -(d+2\alpha) \end{bmatrix} \tag{5}$$

เมื่อ $U^* = -(d+\mu_1+2\omega+\delta+\theta)+\alpha$ และ $U_0 = (\beta-(\alpha-\omega)\gamma)S-(d+\mu_1+\delta+\theta-\alpha)$

และเมื่อพิจารณา

$$\frac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma\alpha} < 1 \text{ จะได้ } 1-\frac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma\alpha} > 0$$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $R_{0\gamma} < 1$ แล้วจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (5) ที่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0)

$$\det(J(P^0)-\lambda I)=\det(A+B-\lambda I)\det(A-B-\lambda I)$$

(i) $tr(A^0+B^0)=-2d-(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(1-R_{0\gamma})-(d+\mu_2+\varepsilon),$

$$\det(A^0+B^0)=d^2(d+\mu_2+\varepsilon)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(1-R_{0\gamma})$$

จะเห็นได้ว่า $tr(A^0+B^0)<0$ และ $\det(A^0+B^0)>0$ เมื่อ $R_{0\gamma}<1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ A^0+B^0 มีค่าเป็นลบ

(ii) $tr(A^0-B^0)=-2(d+2\alpha)-2(\alpha-\omega)-(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)-2(\alpha-\omega)\gamma\dfrac{\Lambda}{d}-(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(1-R_{0\gamma}),$

$$\det(A^0-B^0)=(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(1-R_{0\gamma})$$
$$+2(d+2\alpha)^2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)((\alpha-\omega)\gamma\frac{\Lambda}{d}+(\alpha-\omega))$$

จะเห็นได้ว่า $tr((A^0-B^0)<0$ และ $\det(A^0-B^0)>0$ เมื่อ $R_{0\gamma}<1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ A^0-B^0 มีค่าเป็นลบ

ดังนั้น จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_{0\gamma}<1$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า $R_{0\gamma} > 1$ แล้วจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*) เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ (5) ที่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*)

$$\det(J(P^*)-\lambda I)=\det(A+B-\lambda I)\det(A-B-\lambda I)$$

(i) $tr(A^*+B^*)=-d(R_{0\gamma}-1)-(d+\alpha)-(d+\mu_2+\varepsilon)-d,$

$$\det(A^*+B^*)=d(R_{0\gamma}-1)(d+\mu_2+\varepsilon)\frac{(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)}{\beta+(\alpha-\omega)\gamma}$$

จะเห็นได้ว่า $tr(A^*+B^*)<0$ และ $\det(A^*+B^*)>0$ เมื่อ $R_{0\gamma}>1$ จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ A^*+B^* มีค่าเป็นลบ

(ii) $tr(A^*-B^*)=-2(d+2\alpha)-(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)-2(\alpha-\omega)-2\gamma(\alpha-\omega)\dfrac{(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)}{\beta+(\alpha-\omega)\gamma}-d(1-\dfrac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma\alpha})(R_{0\gamma}-1),$

$$\det(A^*-B^*)=d(R_{0\gamma}-1)(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha)$$
$$+2(\alpha-\omega)d(R_{0\gamma}-1)(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha)+2(d+\mu_2+\varepsilon+2\alpha)(d+2\alpha)(\Gamma_1-\Gamma_2)$$

เมื่อ $\Gamma_1=(d+2\alpha)(\alpha-\omega),\quad \Gamma_2=\dfrac{\gamma\alpha d}{\beta+\gamma\alpha}(R_{0\gamma}-1)((d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)+2(\alpha-\omega))$

จะเห็นได้ว่า $tr(A^*-B^*)<0$ เมื่อ $R_{0\gamma}>1$ และ $\det(A^*-B^*)>0$ เมื่อ $R_{0\gamma}>1$ และ $\Gamma_1>\Gamma_2$
จะทำให้ค่าลักษณะเฉพาะของ A^*-B^* มีค่าเป็นลบ

ดังนั้น จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*) เป็นจุดที่เสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ถ้า $R_{0\gamma}>1$

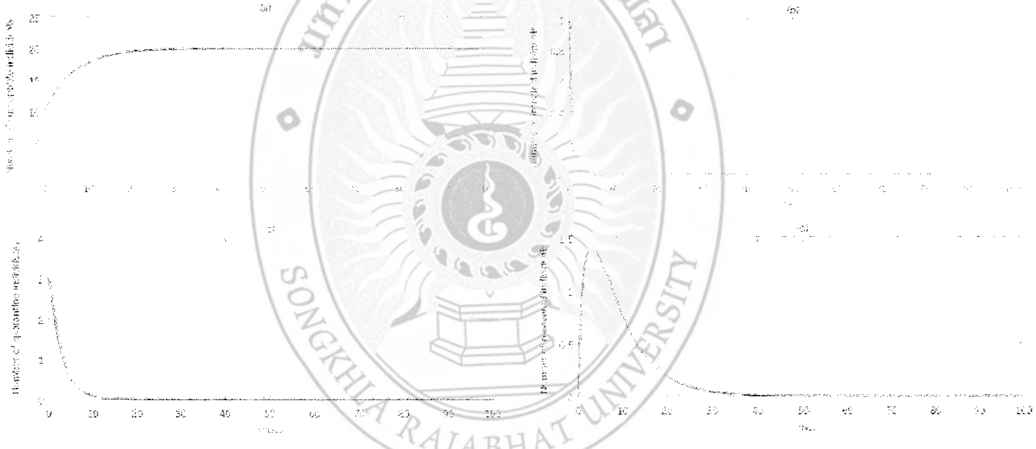
ผลการวิจัย

เนื่องจากแบบจำลองที่พัฒนาได้ สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ดังระบบสมการที่ (1) และ (2) โดยสามารถวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขของแบบจำลองได้ โดยใช้โปรแกรม MATLAB คำนวณผลเชิงตัวเลขร่วมกับค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ (1) โดยแสดงผลในรูปของกราฟ ในการวิเคราะห์ครั้งนี้ได้ทำการตรวจสอบเสถียรภาพของแบบจำลอง ภายใต้เงื่อนไขค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่งและน้อยกว่าหนึ่ง โดยเปลี่ยนแปลงอัตราการแพร่กระจายของโรค (β) เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว

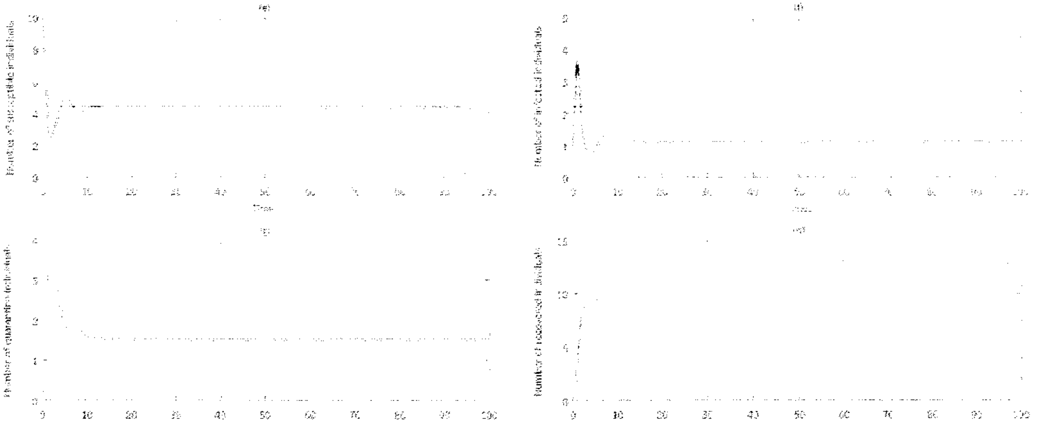
ผลเชิงตัวเลขกรณีประชากรไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง

พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) กำหนดให้ $\beta = 0.005$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานดังนี้ $E^0\left(\frac{\Lambda}{d},0,0,0\right) = E^0\left(20,0,0,0\right)$ และ $R_0 = 0.05 < 1$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 1 แสดงดังภาพที่ 3

พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) กำหนดให้ $\beta = 0.5$ ได้จุดสมดุลและระดับการติดเชื้อดังนี้ $E^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*) = E^*(4.32, 1.09, 1.51, 12.91)$ และ $R_0 = 4.63 > 1$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 2 แสดงดังภาพที่ 4



ภาพที่ 3 ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลอง (2) เมื่อ $\beta = 0.005$ จะได้ $R_0 < 1$



ภาพที่ 4 ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลอง (2) เมื่อ $\beta = 0.5$ จะได้ $R_0 > 1$

ผลเชิงตัวเลขกรณีประชากรมีการเดินทางระหว่างเมืองสองเมือง

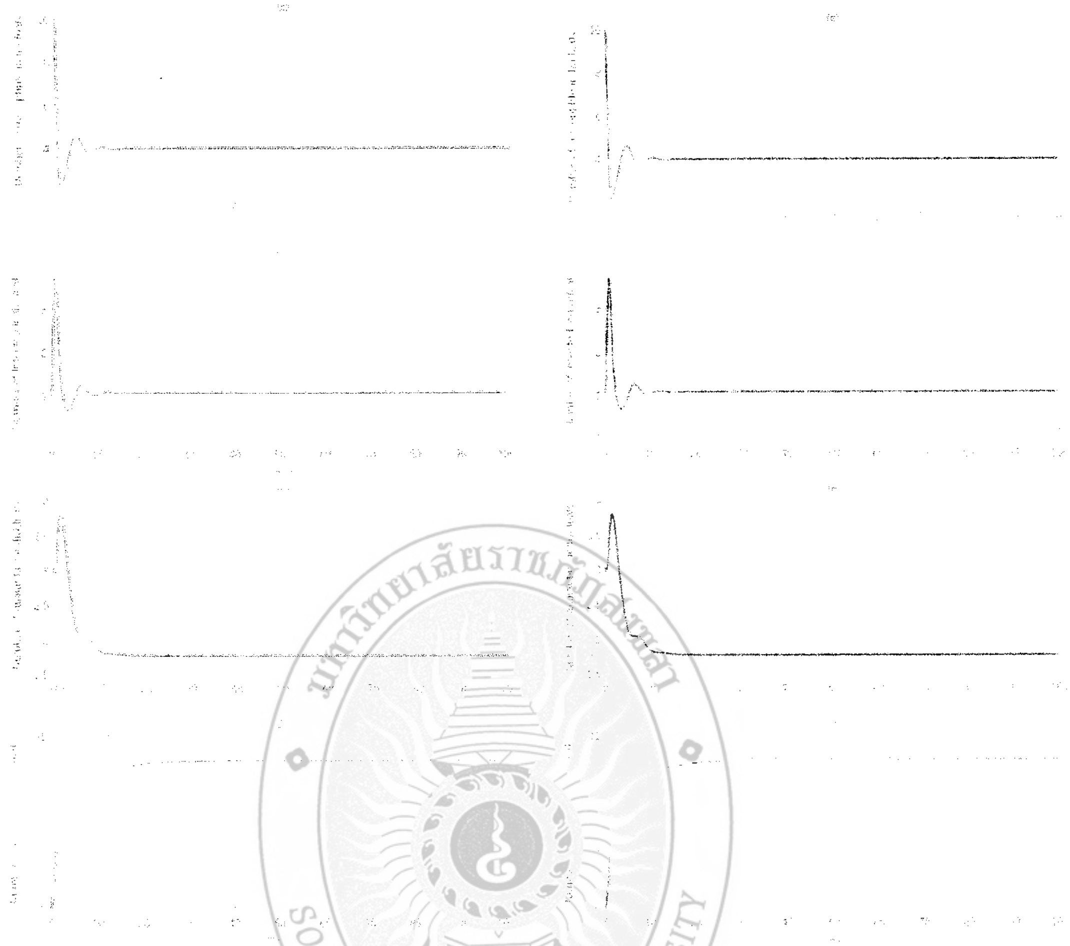
พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) กำหนดให้ $\beta = 0.005$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานดังนี้ $P^0\left(\frac{\Lambda}{d},0,0,0,\frac{\Lambda}{d},0,0,0\right) = P^0\left(20,0,0,0,20,0,0,0\right)$ และ $R_{0\gamma} = 0.76 < 1$ สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3 แสดงดังภาพที่ 5

พิจารณาเสถียรภาพของจุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*) กำหนดให้ $\beta = 0.5$ ได้จุดสมดุลและค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานดังนี้

$$P_\gamma^* = (S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*, S_\gamma^*, I_\gamma^*, Q_\gamma^*, R_\gamma^*) = P_\gamma^*(3.95, 1.05, 1.75, 12.82, 3.95, 1.05, 1.75, 12.82)$$

และ $R_{0\gamma} = 5.06 > 1$ สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 4 แสดงดังภาพที่ 6

ภาพที่ 5 ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลอง (1) เมื่อ $\beta = 0.005$ จะได้ $R_{0\gamma} < 1$



ภาพที่ 6 ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลอง (1) เมื่อ $\beta = 0.5$ จะได้ $R_{0\gamma} > 1$

อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยครั้งนี้พัฒนาแบบจำลองการระบาดสำหรับการคัดแยกประชากรที่ติดเชื้อที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง โดยแบบจำลองอยู่ในรูปแบบ *SIQR* พบว่า กรณีประชากรไม่มีการเดินทางระหว่างเมือง เมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง $(R_0 < 1)$ ผลเชิงตัวเลขลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (E^0) ในทางกลับกัน ถ้าค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง $(R_0 > 1)$ ผลเชิงตัวเลขลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (E^*) แสดงดังภาพที่ 3 และ 4 ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องตามทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 ส่วนกรณีที่ประชากรมีการเดินทางระหว่างสองเมือง เมื่อค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง $(R_{0\gamma} < 1)$ ผลเชิงตัวเลขลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่อิสระจากโรค (P^0) และถ้าค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐานมากกว่าหนึ่ง $(R_{0\gamma} > 1)$ ผลเชิงตัวเลขลู่เข้าสู่จุดสมดุลที่โรคคงอยู่ (P^*) แสดงดังภาพที่ 5 และ 6 ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องตามทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 สำหรับทุก $\gamma > 0$ หมายความว่า $R_{0\gamma}$ เพิ่มขึ้นเมื่อ γ เพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\frac{\partial R_{0\gamma}}{\partial \gamma} = \frac{(\alpha-\omega)\Lambda}{d(d+\mu_1+\omega+\delta+\theta)} > 0$$

แสดงว่าอัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง (γ) แปรผันตรงกับค่าระดับการติดเชื้อพื้นฐาน $(R_{0\gamma})$ นั่นคือหากลดอัตราการแพร่กระจายของโรคที่เกี่ยวข้องกับการเดินทาง ก็จะส่งผลให้จำนวนประชากรที่ติดเชื้อลดลง

สรุปผลการวิจัย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีประโยชน์อย่างยิ่งในด้านควบคุมการระบาดของโรค ซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่สามารถพยากรณ์จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและช่วงระยะเวลาการระบาด ทำให้สามารถวางแผนป้องกันและควบคุมโรคเพื่อลดจำนวนประชากรติดเชื้อ แต่งานวิจัย นี้ยังขาดการศึกษาที่นำแบบจำลองไปประยุกต์ใช้กับโรคที่เกิดขึ้นจริง โดยการนำพารามิเตอร์และปัจจัยต่างๆที่เกี่ยวกับโรคที่ทำการศึกษามาประยุกต์ใช้กับ แบบจำลองที่พัฒนาได้

เอกสารอ้างอิง

[1] ทรงพจน์ สุภาผล. (2560, เมษายน). ความเสี่ยง 7 ประการ กับการเกิดโรคระบาดครั้งใหญ่ในปัจจุบัน. VOA Thai. สืบค้นเมื่อ 20 พฤศจิกายน 2561, จาก https://goo.gl/ZqVkBE

[2] Kermach W.O. and Mckendrick A.G. (1927, 13 May). A Contributions to the Mathematical Theory of Epidemic. Proceedings of the Royal Society A Mathematical. *Physical and Engineering sciences.* (115): 700-721

[3] Jin'an Cui, Yasuhiro Takeuchi and Yasuhisa Saito. (2005, 10 October). Spreading disease with transport-related infection. *Journal of Theoretical Biology.* (239): 376-390

[4] H. Wan and J. Cui. (2007). An SEIS epidemic model with transport-related infection. *J. Theor. Biol.* (247): 507

[5] Yasuhiro Takeuchi, Xianning Liu and Jingan Cui. (2007). Global dynamics of SIS models with transport-related infection. *ScienceDirect.* (329): 1460-1471

[6] Adisak Denphedtnong, Settapat Chinviriyasit and Wirawan Chinviriyasit. (2013). On the dynamics of SEIRS epidemic model with transport-related infection. *Mathematical Biosciences.* (245): 188-205

[7] Nidhi Nirwani, V.H. Badshah and R. Khandelwal. (2016). Dynamical Study of an SIQR Model with Saturated Incidence Rate. *Nonlineae Analysis and Differential Equations.* (4): 43-50

[8] Ven den Driessche,P. and Watmough, J. (2002). Reproduction number and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Math. Biosci.* (180): 29-48

[9] Anderson, R.M., and May, R.M. (1991). Infectious diseases of humans. London: Oxford University Press.

เอกสารอ้างอิง

เจษฎา เด็นดวงบริพันธ์. (2547). บทเรียนจากซาร์ส. *วารสารยวิจัยวิทยาศาสตร์ (Section T), 3(1)*, 49-60.

พวงทอง ไกรพิบูลย์. (2556). *โรคติดต่อ ภาวะติดเชื้อ.* สืบค้น 20 พฤศจิกายน 2561, จาก http://haamor.com

ทรงพจน์ สุภาผล. (2561). *ความเสี่ยง 7 ประการ กับการเกิดโรคระบาดครั้งใหญ่ในปัจจุบัน.* สืบค้น 20 พฤศจิกายน 2561, จาก https://goo.gl/ZqVkBE

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2551). *บทที่ 3 ฟังก์ชันของหลายตัวแปร.* Retrieved December 7, 2018, from http:// pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/ 2301217/ sheet_lecture_2551_2nd/ v11_Cal_III_ch3_page_001_104_2551_2nd.pdf

อาริสา ฉัตรกิจวรุณ. (2542). *พีชคณิตเชิงเส้น.* สงขลา: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาสงขลานครินทร์.

Adisak, D., Settapat, C., & Wirawan, C. (2013). On the dynamics of SEIRS epidemic model with transport-related infection. *Mathematical Biosciences*, *245*, 188-205.

Cui, J., Takeuchi, Y., & Yasuhisa, S. (2005). Spreading disease with transport-related infection. *Journal of Theoretical Biology*, *239*, 376-390.

Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Metz, J. A. J. (1990). On the definition and the computation of the basic reproduction ratio 0 r in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Math. Biol.*, 365-382.

Kermach, W. O., & Mckendrick, A. G. (1927). A contributions to the mathematical theory of epidemic. proceedings of the royal society a mathematical. *Physical and Engineering sciences*, *115*, 700-721.

Liu, X., Takeuchi, Y., & Cui, J. (2007). Global dynamics of SIS models with transport-related infection. *ScienceDirect*, *329*, 1460-1471.

Nirwani, N., Badshah, V. H., & Khandelwal, R. (2016). Dynamical Study of an SIQR Model with Saturated Incidence Rate. *Journal of Memory and Language*, *4*, 43-50.

Wan, H., & Cui, J. (2007). An SEIS epidemic model with transport-related infection. *J. Theor.Biol*, *247*, 507.